Wirtschaftsmathematik: Mathematische Grundlagen

1. Zahlen
2. Potenzen und Wurzeln
3. Rechenregeln und Vereinfachungen
4. Ungleichungen
5. Intervalle
6. Beträge
7. Lösen von Gleichungen
8. Logarithmen
9. Summen

Mathematische Grundlagen

Zahlen

Natürliche Zahlen: $\mathbb{N}$ $\quad \mathbf{1, 2, 3, 4, \ldots}$

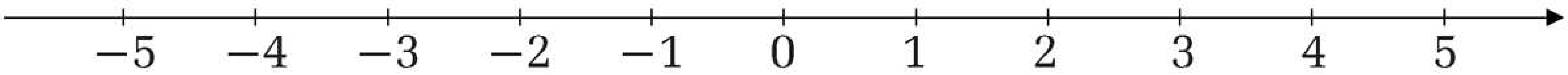
Natürliche Zahlen mit 0: $\mathbb{N}_0$ $\quad \mathbf{0, 1, 2, 3, 4, \ldots}$

Gerade Zahlen: $\quad \mathbf{2, 4, 6, \ldots}$

Ungerade Zahlen: $\quad \mathbf{1, 3, 5, \ldots}$

Ganze Zahlen; $\quad \mathbf{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \ldots}$

Darstellung auf der Zahlengeraden:



Mathematische Grundlagen

Zahlen

Rationale Zahlen: a/b, wobei a und $b \neq 0$ ganze Zahlen

Es gibt keine **ganzen Zahlen** a **und** b**, so dass** $\sqrt{2} = a/b$.

$\Longrightarrow$ $\sqrt{2}$ **ist <u>keine</u> rationale Zahl.**

Zahlen, die nicht als Bruch ganzer Zahlen geschrieben werden können, sind irrationale Zahlen.

Beispiele für irrationale Zahlen:

$\sqrt{2}$, $-\sqrt{5}$

π Kreiszahl: $3.14159265359\ldots$, $2^{\sqrt{2}}$

$0.12112211122211112222\ldots$

Mathematische Grundlagen

Zahlen

Reelle Zahlen $\mathbb{R}$:
Vereinigung von **rationalen** und **irrationale** Zahlen.

Jede **reelle Zahl ist ein beliebiger unendlicher Dezimalbruch**

$$x = \pm m.\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots$$

Dabei ist m eine nicht-negative ganze Zahl und $\alpha_n\ (n = 1, 2, \ldots)$ ist eine unendliche Folge von Ziffern aus dem Bereich 0 bis 9.

Rechenoperationen:

Addition +, Subtraktion - , Multiplikation ·, Division : / :

Mathematische Grundlagen

Zahlen

- Jeder **endliche Dezimalbruch** ist eine **rationale Zahl.**
- <u>Nicht</u> **jede rationale Zahl kann als endlicher Dezimalbruch geschrieben werden.**

  Schreibweise für $x \in \mathbb{R}$:

  $\lceil x \rceil =$ kleinste ganze Zahl $\geq x$

  $\lfloor x \rfloor =$ größte ganze Zahl $\leq x$

  Beispiel:

  $\lceil 2.7182 \rceil = 3 \qquad \lfloor 2.7182 \rfloor = 2 \qquad \lceil 5 \rceil = \lfloor 5 \rfloor = 5$

  $\lceil -5.463 \rceil =$ -5 $\qquad \lfloor -5.463 \rfloor = -6$

Mathematische Grundlagen
Zahlen und Rechnen

Die spezielle Zahl $\mathbf{0}$:
Für jede reelle Zahl $\boldsymbol{a}$ gilt:

1.)	Addition	$\boldsymbol{a} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$
2.)	Subtraktion	$\boldsymbol{a} - \mathbf{0} = \boldsymbol{a} \qquad \mathbf{0} - \boldsymbol{a} = -\boldsymbol{a}$
3.)	Multiplikation	$\boldsymbol{a} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0} \cdot \boldsymbol{a} = \mathbf{0}$
4.)	Division	$\mathbf{0}/\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$ für $\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}$

$\boldsymbol{a}/\mathbf{0}$ **ist nicht definiert!**

$\mathbf{0}/\mathbf{0}$ **ist nicht definiert!**

Mathematische Grundlagen
Zahlen und Rechnen

Multiplikation aller Zahlen von 1 bis 6:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720 = 6!$$

Allgemein:
Multiplikation aller Zahlen von 1 bis *n* wird bezeichnet mit:

n!   n-Fakultät oder n-Faktorielle

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (n-1) \cdot n = n!$$

Definition: 0! = 1

Rekursive Definition: n! = n · (n-1)! für n>0

Mathematische Grundlagen

Potenzrechnung

Wiederholte Ausführung einer Multiplikation mit sich selbst:

$2^2 = 2 \cdot 2 \qquad 3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{n Faktoren}}$$

a **Basis** $\quad n$ **Exponent**

a wird n-mal mit sich selbst multipliziert

$$a^1 = a \qquad a^2 = a \cdot a \qquad x^4 = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot x}_{\text{4 Faktoren}}$$

$$a = p/q,\ n = 5: \quad \left(\frac{p}{q}\right)^5 = \frac{p}{q} \cdot \frac{p}{q} \cdot \frac{p}{q} \cdot \frac{p}{q} \cdot \frac{p}{q}$$

Mathematische Grundlagen

Potenzrechnung

Null $\mathbf{0}$ als Exponent: Was tun?

Definition: $\quad \boldsymbol{a}^{\mathbf{0}} = \mathbf{1} \quad \text{für} \quad \boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}$

ABER: $\quad \mathbf{0}^{\mathbf{0}}$ ist **nicht** definiert!!!

Negative Zahl als Exponent, z.B. $\mathbf{3}^{-\mathbf{2}} = ????$

Antwort: $\mathbf{3}^{-\mathbf{2}} = \mathbf{1/3^{2}} = \mathbf{1/9}$

Allgemeine Definition:

$$\boldsymbol{a}^{-\boldsymbol{n}} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{n}}} \qquad \text{für } n \in \mathbb{N} \text{ und } a \neq 0$$

Mathematische Grundlagen
Potenzrechnung

Rechenregeln für Potenzen bei gleicher Basis:

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s}$$

Exponenten addieren
Basis bleibt

$$(a^r)^s = a^{rs}$$

Exponenten multiplizieren
Basis bleibt

$$\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$$

Exponenten subtrahieren
Basis bleibt

Mathematische Grundlagen
Potenzrechnung

Rechenregeln für Potenzen mit gleichen Exponenten:

$$(ab)^{r} = a^{r} b^{r}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{r} = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \ldots \cdot \frac{a}{b}}_{\text{r Faktoren}} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{\text{r Faktoren}}}{\underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{\text{r Faktoren}}} = \frac{a^{r}}{b^{r}} = a^{r} b^{-r}$$

$$(abcde)^{r} = a^{r} b^{r} c^{r} d^{r} e^{r}$$

Mathematische Grundlagen

Potenzrechnung

Potenzen einer Summe:

$$(a+b)^{r} = ???$$

Im allgemeinen gilt:

$$(a+b)^{r} \neq a^{r} + b^{r}$$

Beispiel:

$$(3+5)^2 = 8^2 = 64$$

$$3^2 + 5^2 = 9 + 25 = 34 \neq 64$$

Mathematische Grundlagen
Potenzrechnung

Anwendung in der Zinsrechnung:

- Anfangskapital: $\boldsymbol{K}$ Euro, Zinssatz $\boldsymbol{p}\%$
- Guthaben nach einem Jahr: $\boldsymbol{K + K \cdot p/100 = K(1 + p/100)}$
- Wachstumsfaktor pro Jahr: $\boldsymbol{1 + p/100}$
- Guthaben nach $\boldsymbol{t}$ Jahren:

$$\boldsymbol{K\left(1+\frac{p}{100}\right)^{t}}$$

Mathematische Grundlagen

Potenzrechnung

Anwendung mit negativen Exponenten:

Wieviel Geld $\boldsymbol{x}$ hätte man vor $\mathbf{5}$ Jahren bei einem Zinssatz von $\mathbf{8}\%$ anlegen müssen, um heute $\mathbf{1\,000}$ Euro zu erhalten?

$$\boldsymbol{x} \cdot (\mathbf{1.08})^{\mathbf{5}} = \mathbf{1\,000}$$

$$\boldsymbol{x} = \frac{\mathbf{1\,000}}{(\mathbf{1.08})^{\mathbf{5}}} = \mathbf{1\,000} \cdot (\mathbf{1.08})^{-\mathbf{5}} = \mathbf{680.58} = \boldsymbol{x}$$

Man hätte vor $\boldsymbol{t}$ Jahren $\boldsymbol{P}(\mathbf{1} + \boldsymbol{p}/\mathbf{100})^{-\boldsymbol{t}}$ Euro zu einem festen Zinssatz von $\boldsymbol{p}\%$ pro Jahr anlegen müssen, um heute $\boldsymbol{P}$ Euro zu erhalten.

Mathematische Grundlagen

Wurzeln

Potenzen:
Was tun, wenn der Exponent eine rationale Zahl ist?

$$a^{1/2} = \sqrt{a}\,, \quad \text{falls } a \geq 0 \qquad \text{Quadratwurzel}$$

$$a^{1/2} \cdot a^{1/2} = a^{1/2+1/2} = a^1 = a \qquad (a^{1/2})^2 = a^{(1/2)\cdot 2} = a^1 = a$$

$$\sqrt{16} = 16^{1/2} = 4\ , \text{ da } \ 4^2 = 16$$

$$\sqrt{\frac{1}{25}} = \frac{1}{5}\ , \text{ da } \ \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{25}$$

$$\sqrt{0.01} = (0.01)^{1/2} = 0.1\ , \text{ da } \ 0.1 \cdot 0.1 = 0.01$$

Mathematische Grundlagen

Wurzeln

Es gelten die gleichen Rechenregeln wie bei „klassischen“ Potenzen (Exponent ist natürliche Zahl) !

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b} \qquad a, b \geq 0$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \qquad a \geq 0,\ b > 0$$

Achtung: Gilt nicht für negative Werte von a oder b.

$$(ab)^{1/2} = a^{1/2}b^{1/2} \text{ und } (a/b)^{1/2} = a^{1/2}/b^{1/2}$$

Zu beachten wie bei „klassischen“ Potenzen:

$$(a+b)^r \neq a^r + b^r$$

Mathematische Grundlagen
Wurzeln

Quadratwurzel ist nichtnegativ!

d.h. $\boldsymbol{x = -2}$ und $\boldsymbol{x = 2}$ sind Lösungen der Gleichung $\boldsymbol{x^2 = 4}$, d.h.

$$\boldsymbol{x^2 = 4 \iff x = \pm\sqrt{4} = \pm 2}$$

Jedoch: $\boldsymbol{\sqrt{4} = 2}$ und **NICHT** $\boldsymbol{-2}$

Mathematische Grundlagen

Allgemeine Wurzeln

Was bedeutet $a^{1/n}$, wenn $a > 0$ und n eine **natürliche** Zahl ist?

$$(a^{1/n})^n = a^1 = a$$

$a^{1/n}$ ist Lösung von $x^n = a$

$x^n = a$ hat eine eindeutige **positive** Lösung, die mit $\sqrt[n]{a}$, n-te Wurzel aus a bezeichnet wird:

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$$

Spezialfall: n=3 -> Dritte oder kubische Wurzel

Mathematische Grundlagen
Allgemeine Wurzeln

Wenn $a > \mathbf{0}$ und n eine natürliche Zahl, so ist $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$ die eindeutig bestimmte **positive Zahl**, deren n-te Potenz gleich a ist.

Es ist diejenige **positive** Zahl, die n-mal mit sich selbst multipliziert a ergibt.

$$(a^{1/n})^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = \underbrace{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdot \ldots \cdot \sqrt[n]{a}}_{n-\text{mal}} = a$$

Mathematische Grundlagen
Allgemeine Wurzeln

Anwendung mit rationalen Exponenten:

Ein Betrag von € 5.000.- auf einem Sparkonto ist in 15 Jahren auf € 10.000.- angewachsen.
Wie hoch war der konstante, jährliche Zinssatz *p* ?

In 15 Jahren wachsen $\mathbf{5\,000}$ Euro an auf

$$\mathbf{5000(1 + p/100)^{15}}$$

Daher: $\mathbf{5000\left(1+\frac{p}{100}\right)^{15} = 10\,000}$ oder $\mathbf{\left(1+\frac{p}{100}\right)^{15} = 2}$

$$\mathbf{1+\frac{p}{100} = 2^{1/15}} \quad \text{oder} \quad \mathbf{p = 100(2^{1/15}-1) \approx 4.73}$$

Mathematische Grundlagen

Allgemeine Wurzeln

Potenzen mit Bruchzahl als Exponenten $a^{p/q} = ???$

p ganze Zahl, q natürliche Zahl und $a > 0$

Definition:

$$a^{p/q} = \left(a^{1/q}\right)^p = \left(\sqrt[q]{a}\right)^p$$

Folgerung:

$$a^{p/q} = \left(a^{1/q}\right)^p = a^{(1/q)\cdot p} = a^{p\cdot(1/q)}$$

$$= (a^p)^{1/q} = \sqrt[q]{a^p}$$

Beispiel:

$$4^{7/2} = (4^7)^{1/2} = 16384^{1/2} = 128 = 2^7 = (4^{1/2})^7$$

Mathematische Grundlagen
Allgemeine Wurzeln

Potenzen mit negativer Basis:

Wenn $\boldsymbol{q}$ ungerade und $\boldsymbol{p}$ eine ganze Zahl, kann $\boldsymbol{a^{p/q}}$ auch für $\boldsymbol{a < 0}$ definiert werden, z.B.

$$\boldsymbol{(-8)^{1/3} = \sqrt[3]{-8} = -2} \quad \text{da } \boldsymbol{(-2)^3 = -8}$$

Zur eindeutigen Definition muss $\boldsymbol{p/q}$ so weit wie möglich gekürzt werden.

Sonst gibt es Widersprüche wie z.B. hier:

$$\boldsymbol{-2 = (-8)^{1/3} = (-8)^{2/6} = \left((-8)^2\right)^{1/6} = (64)^{1/6} = \sqrt[6]{64} = 2}$$

Mathematische Grundlagen
Elementare Rechenregeln

Binomische Formeln:

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2+2ab+b^2$$

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2-2ab+b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2-b^2$$

Rechnen mit negativen Klammern:

$$(-1)x = -x$$

$$-(a+b-c+d) = -a-b+c-d$$

Mathematische Grundlagen
Algebraische Ausdrücke

Bezeichnungsweise eines algebraischen Ausdrucks:

$$3xy - 5x^2y^3 + 2xy + 6y^3x^2 - 3x + 5yx + 8$$

Terme:

$$3xy,\ -5x^2y^3,\ 2xy,\ 6y^3x^2,\ -3x,\ 5yx,\ 8$$

Numerische Koeffizienten:

$$3, \quad -5, \quad 2, \quad 6, \quad -3, \quad 5$$

Terme vom selben Typ:

$3xy,\ 2xy,\ 5yx$ und $-5x^2y^3,\ 6y^3x^2$

Mathematische Grundlagen
Algebraische Ausdrücke

Systematische Vorgangsweise zur Vereinfachung:

1. Terme vom selben Typ sammeln
2. Numerische Koeffizienten an den Anfang
3. Buchstaben in alphabetischer Reihenfolge
4. Höhere Potenzen nach vorn
5. Mehr Faktoren nach vorn

Mathematische Grundlagen
Algebraische Ausdrücke

Beispiel: Systematische Vorgangsweise:

$$3xy - 5x^2y^3 + 2xy + 6y^3x^2 - 3x + 5yx + 8$$

1. $3xy + 2xy + 5yx - 5x^2y^3 + 6y^3x^2 - 3x + 8$

2. Schon erledigt

3. $\underbrace{3xy + 2xy + 5xy}_{=10xy} \underbrace{-5x^2y^3 + 6x^2y^3}_{=x^2y^3} -3x + 8$

4. $x^2y^3 + 10xy - 3x + 8$

5. Schon erledigt

Ungleichungen

Vergleichen von Zahlen und Termen:

Die Zahl $\boldsymbol{a}$ ist **größer** als die Zahl $\boldsymbol{b}$, wenn $\boldsymbol{a-b}$ positiv ist. Wir schreiben dann:

$\boldsymbol{a} > \boldsymbol{b}$ $\quad$ $\boldsymbol{a}$ ist **strikt größer** als $\boldsymbol{b}$

Wenn $\boldsymbol{a} > \boldsymbol{b}$ oder $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$, d.h. $\boldsymbol{a}$ ist **größer oder gleich**, schreiben wir $\boldsymbol{a} \geq \boldsymbol{b}$.

$\boldsymbol{a} \geq \boldsymbol{b}$ $\quad$ bedeutet $\quad$ $\boldsymbol{a - b} \geq \boldsymbol{0}$

$>$ und $<$ $\quad$ **Strikte** Ungleichungen

$\geq$ und $\leq$ $\quad$ **Schwache** Ungleichungen

Mathematische Grundlagen
Ungleichungen

Rechenregeln für Ungleichungen:

Wenn $\boldsymbol{a} > \boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{c} > \mathbf{0}$, dann ist $\boldsymbol{ac} > \boldsymbol{bc}$

Wenn $\boldsymbol{a} > \boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{c} < \mathbf{0}$, dann ist $\boldsymbol{ac} < \boldsymbol{bc}$

(a) Wenn beide Seiten einer Ungleichung mit einer **positiven Zahl multipliziert** werden, **bleibt die Richtung der Ungleichung erhalten**.

(5) Wenn beide Seiten einer Ungleichung mit einer **negativen Zahl multipliziert** werden, **kehrt sich die Richtung der Ungleichung um**.

Mathematische Grundlagen
Intervalle

Notation	Name	Enthält x mit:
(a, b)	Offenes Intervall von a bis b	$a < x < b$
$[a, b]$	Abgeschlossenes Intervall von a bis b	$a \leq x \leq b$
$(a, b]$	Halboffenes Intervall von a bis b	$a < x \leq b$
$[a, b)$	Halboffenes Intervall von a bis b	$a \leq x < b$

Die Länge aller Intervalle ist $b - a$.

Alle diese Intervalle sind **beschränkt.**

Mathematische Grundlagen
Intervalle

Symbol ∞ für den Begriff „Unendlich“.

∞ ist keine Zahl, sondern ein Symbol.

Die üblichen Rechenregeln für Zahlen gelten nicht für ∞.

Unbeschränkte Intervalle:

$[a,\infty)$ = alle Zahlen x mit $x \geq a$

$(-\infty, b)$ = alle Zahlen x mit $x < b$

Das Intervall $[a, \infty)$ hat keine **obere** Schranke.

Das Intervall $(-\infty, b)$ hat keine **untere** Schranke.

Die Menge **aller reellen Zahlen** ist: $(-\infty, \infty)$

Mathematische Grundlagen
Betrag

Der **Abstand** zwischen einer reellen Zahl *a* und 0 heißt **Absolutbetrag von *a*,** bezeichnet mit |*a*|.
Es gilt:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{falls} \quad a \geq 0 \\ -a & \text{falls} \quad a < 0 \end{cases}$$

Beispiel:

$$|x-2| = \begin{cases} x-2, & \text{falls} \quad x \geq 2 \\ 2-x, & \text{falls} \quad x < 2 \end{cases}$$

Mathematische Grundlagen

Betrag

Abstand zwischen zwei Zahlen,
d.h. Abstand zwischen zwei Punkten auf der Zahlengerade:

Abstand zwischen x_1 und x_2

$$\begin{array}{rll} x_1 - x_2 & \text{wenn} & x_1 \geq x_2 \\ -(x_1 - x_2) & \text{wenn} & x_1 < x_2 \end{array}$$

D.h. Abstand zwischen x_1 und x_2 ist:

$$|x_1 - x_2| = |x_2 - x_1|$$

Mathematische Grundlagen
Betrag

Beispiel: Bestimmen Sie alle *x*, für die gilt: $|3x - 2| \leq 5$

$$|x| \leq a \quad \text{bedeutet} \quad -a \leq x \leq a \qquad (4)$$

$$|3x - 2| \leq 5 \qquad -5 \leq 3x - 2 \leq 5$$

Zu allen drei Ausdrücken $\mathbf{2}$ addieren:

$$-5 + 2 \leq 3x - 2 + 2 \leq 5 + 2 \quad \text{oder} \quad -3 \leq 3x \leq 7$$

$$-1 \leq x \leq 7/3$$

Lösen von Gleichungen

Alle Werte der Variablen finden, welche die vorliegende Gleichung erfüllen.

Ein Lösungswert ist nur zulässig, wenn für ihn alle Ausdrücke der Gleichung definiert sind.

Es kann keine, genau eine (eindeutig), mehrere oder unendlich viele Lösungen geben.

(b) $$\frac{z}{z-5} + \frac{1}{3} = \frac{-5}{5-z}$$

$z = 5$ nicht zulässig! Unter dieser Restriktion multiplizieren wir mit $3(z-5)$

$$3z + z - 5 = 15 \quad \Longleftrightarrow \quad 4z = 20 \quad \Longleftrightarrow \quad z = 5$$

Die Lösung $z = 5$ ist jedoch nicht zulässig. Daher gibt es **keine** Lösung der Gleichung (b).

Mathematische Grundlagen
Lösen von Gleichungen

Spezialfall: Lineare Gleichung

$$y = ax + b$$

a und ***b*** sind reelle Zahlen und heißen Parameter.

Es gilt stets: $a \neq 0$

Allgemeine Lösung: $$x = \frac{y-b}{a}$$

Beispiele:

(a) $y = 10x$ (b) $y = 3x + 4$ (c) $y = -\frac{8}{3}x - \frac{7}{2}$

Mathematische Grundlagen

Lösen von Gleichungen

Spezialfall: Quadratische Gleichung

$$ax^2 + bx + c = 0$$

a, *b* und *c* sind reelle Zahlen und heißen Parameter.

x ist die unbekannte Variable.

Es gilt stets: ***a*≠0**

Allgemeine Lösungsformel:

Für $b^2 - 4ac \geq 0$ und $a \neq 0$ gilt:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Für $b^2 - 4ac < 0$ gibt es **keine reellen Lösungen**.

Die Lösungen heißen auch <u>**Wurzeln**</u> der quadratischen Gleichung.

Mathematische Grundlagen
Lösen von Gleichungen

Spezialfall: Quadratische Gleichung

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (a \neq 0)$$

Division durch a ergibt die **äquivalente Gleichung**:

Mit $p = b/a$ und $q = c/a$ ergibt sich

$$x^2 + px + q = 0$$

Für $p^2/4 - q \geq 0$ gilt:

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

Für $p^2/4 - q < 0$ gibt es **keine reellen Lösungen**.

Mathematische Grundlagen
Lösen von Gleichungen

Faktorenzerlegung einer quadratischen Gleichung:

Wenn x_1 und x_2 Lösungen von $ax^2 + bx + c = 0$,
so gilt für $b^2 - 4ac \geq 0$:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Für $b^2 - 4ac = 0$ gilt $x_1 = x_2$ und somit:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2 = a(x - x_2)^2$$

Für $b^2 - 4ac < 0$ gibt es **keine Faktorenzerlegung**.

Mathematische Grundlagen
Lösen von Gleichungen

Quadratische Gleichung: Satz von Vieta

François Viète (1540-1603)

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (a \neq 0)$$

$$x^2 + px + q = 0 \qquad p = \frac{b}{a} \quad q = \frac{c}{a}$$

Wenn x_1 und x_2 Lösungen sind, so gilt:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -p \qquad x_1 x_2 = \frac{c}{a} = q$$

Mathematische Grundlagen
Lösen von Gleichungen

Lösung von 2 Gleichungen mit 2 Variablen:

Beispiel:

$$\begin{aligned} \mathbf{2}x + \mathbf{3}y &= \mathbf{18} \\ \mathbf{3}x - \mathbf{4}y &= \mathbf{-7} \end{aligned}$$

Einsetzungsmethode:

1.) Lösen Sie **eine Gleichung nach einer Variablen** auf.

2.) **Setzen** Sie das Ergebnis in die **andere Gleichung ein**.

Mathematische Grundlagen
Lösen von Gleichungen

Einsetzungsmethode:

Beispiel Forts.:

1.) Gleichung 1 nach y auflösen:

$$2x + 3y = 18 \Rightarrow \ 3y = 18 - 2x \ \Rightarrow \ y = 6 - \frac{2}{3}x$$

2.) Einsetzen in Gleichung 2: $\quad 3x - 4(6 - \frac{2}{3}x) = -7 \iff$

$$3x - 24 + \frac{8}{3}x = -7 \iff 9x - 72 + 8x = -21 \iff$$

$$17x = 51 \iff x = 3$$

$$y = 6 - \frac{2}{3}x \ \text{ und } x = 3 \Rightarrow y = 6 - \frac{2}{3} \cdot 3 = 6 - 2 = 4$$

Mathematische Grundlagen
Lösen von Gleichungen

Produkt-Null Satz:

Ein Produkt von zwei oder mehr Faktoren kann nur dann 0 sein, wenn wenigstens einer der Faktoren 0 ist.

Beispiel: $$x^3\sqrt{x+2} = 0$$

Entweder: $x^3 = 0$ oder $\sqrt{x+2} = 0$

Lösungen: $x = 0$ oder $x = -2$

Achtung: Keinen Faktor durch „Kürzen“ entfernen!

Dieser Faktor könnte 0 sein und eine Lösung liefern!

Mathematische Grundlagen

Logarithmen

Potenz: Gegeben eine Basis ***a*** und ein Exponent ***u***.
Wie lautet das Ergebnis ***x*** für $x = a^u$?

Umkehraufgabe: Gegeben eine Basis ***a*** und ein Ergebnis ***x***.
Wie lautet der Exponent ***u***, sodass $x = a^u$?

Definition:

Wenn $a^u = x$

dann heißt u der **LOGARITHMUS** von x zur **BASIS** a.

$$u = \log_a x$$

Logarithmen

Es gilt stets (für $x > 0$)**:**

Wenn $u = \log_a x$

dann ist $a^{\log_a x} = x$

Beispiele:

$$\log_2 32 = 5, \quad \text{da } 2^5 = 32$$

$$\log_{10}(1/100) = -2, \quad \text{da } 10^{-2} = 1/100$$

Logarithmen

Spezialfall:

Wenn die Basis ***a*** gleich der **Eulerschen Zahl *e*** ist (***e*** = 2,71828…), dann nennt man $\mathbf{log}_{a}$ den natürlichen Logarithmus, geschrieben als **ln** (*logarithmus naturalis*), also:

$$\ln x = \log_e x$$

Umgekehrt:

Wenn $e^u = b$

heißt u der NATÜRLICHE LOGARITHMUS von b.

Offenbar gilt:

$$e^{\ln x} = x \quad \text{und} \quad \ln(e^x) = x$$

Mathematische Grundlagen
Logarithmen

Natürlicher Logarithmus

Beispiele:

(a) $\ln 1 = 0$, da $e^0 = 1$

(b) $\ln e = 1$, da $e^1 = e$

(c) $\ln(1/e) = \ln e^{-1} = -1$, da $e^{-1} = 1/e^1 = 1/e$

(d) $\ln 4 \approx 1.386$, da $e^{1.386} \approx 4$

(e) $\ln(-6)$ ist nicht definiert.

Mathematische Grundlagen
Logarithmen

Rechenregeln für Logarithmen zur Basis a:

(a) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ **Logarithmen addieren**

(b) $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$ **Logarithmen subtrahieren**

(c) $\log_a x^p = p \log_a x$,

(d) $\log_a 1 = 0$ **Logarithmus von Eins ist Null**

$\log_a a = 1$ **Logarithmus von a zur Basis a ist Eins**

Mathematische Grundlagen
Logarithmen

Es gilt:

$$\ln x + \ln y = \ln(xy)$$

Warnung:

$$\ln(x+y) \overset{!!!}{\neq} \ln x + \ln y$$

Es gibt keine einfachen Formeln für

$$\ln(x+y) \text{ und } \ln(x-y)$$

Mathematische Grundlagen
Logarithmen

Beispiel: $5e^{-3x} = 16$

Lösung: ln auf jeder Seite $\ln(5e^{-3x}) = \ln 16$

Produktregel: $\ln(5e^{-3x}) = \ln 5 + \ln e^{-3x}$

Es gilt: $\ln e^{-3x} = -3x$. Daher ist

$\ln 5 - 3x = \ln 16$, so dass $x = \frac{1}{3}(\ln 5 - \ln 16) = \frac{1}{3} \ln \frac{5}{16}$

Mathematische Grundlagen
Logarithmen

Zusammenhang zwischen **ln** und **log:**

$$a^{\log_a x} = x$$

Auf beiden Seiten **ln** bilden: $\ln(a^{\log_a x}) = \ln x$

Links Rechenregel für Logarithmus einer Potenz anwenden:

$$\log_a x \cdot \ln a = \ln x$$

$$\boxed{\log_a x = \frac{1}{\ln a} \ln x}$$

Mathematische Grundlagen
Logarithmen

Beispiel:
Ein Euro wird auf einem Sparbuch mit 8% Zinsen angelegt.
Wie lange dauert es, bis daraus 10 Euros geworden sind?

Lösung: gesucht ist x, die Anzahl der Jahre, sodass gilt:

$$(1.08)^x = 10$$

$$x \ln 1.08 = \ln 10$$

Daher ist: $x = \ln 10 / \ln 1.08 \approx 29.9$

Mathematische Grundlagen

Summen

Betrachte die Summe von 6 Zahlen,
bezeichnet mit N_1 bis N_6:

Summe von $i = 1$ bis $i = 6$ über N_i

$$N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5 + N_6 = \sum_{i=1}^{6} N_i$$

i Summationsindex   1 und 6 Summationsgrenzen

Σ Sigma Summationssymbol

Summen

Allgemeine Summationsgrenzen:

p, q ganze Zahlen mit $q \geq p$

$$\sum_{i=p}^{q} a_i = a_p + a_{p+1} + a_{p+2} + \ldots + a_q$$

Mathematische Grundlagen

Summen

Beispiele:

(a) $\mathbf{1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^{81}} \qquad = \sum_{i=0}^{81} 3^i$

Man beachte: $\mathbf{3^0 = 1}$ und $\mathbf{3^1 = 3}$

(b) $$\sum_{j=-3}^{1} x^{5-j} y^{j} =$$

$$x^{5-(-3)}y^{-3} + x^{5-(-2)}y^{-2} + x^{5-(-1)}y^{-1} + x^{5-0}y^{0} + x^{5-1}y^{1} =$$
$$x^8y^{-3} + x^7y^{-2} + x^6y^{-1} + x^5 + x^4y$$

Summen

Summe der Zahlen von 1 bis n:

Carl Friedrich Gauß (1777-1855)

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{1}{2} n(n+1)$$

Summe der Quadratzahlen

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

Summe der Kubikzahlen

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left[\frac{1}{2} n(n+1)\right]^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2$$

Mathematische Grundlagen

Summen

Gegeben T Zahlen: $x_1, x_2, \ldots, x_T$

$$\mu_x = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^{T} x_i \qquad \text{Mittelwert}$$

<u>Behauptung:</u> $$\sum_{i=1}^{T} (x_i - \mu_x) = 0, \quad \text{d.h.}$$

die **Summe der Abweichungen vom Mittelwert ist Null**.

<u>Beweis:</u> $$\sum_{i=1}^{T} (x_i - \mu_x) = \sum_{i=1}^{T} x_i - \sum_{i=1}^{T} \mu_x =$$

$$\sum_{i=1}^{T} x_i - T\mu_x = T\mu_x - T\mu_x = 0$$

Mathematische Grundlagen
Doppelsummen

Beispiel:

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}(i+2j)$$

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}(i+2j) = \sum_{i=1}^{3}\left[(i+2)+(i+4)+(i+6)+(i+8)\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{3}(4i+20) = 24+28+32 = 84$$