# Beispielsammlung Wirtschaftsmathematik

**Übungsbeispiele für die Vorlesung und Übung Wirtschaftsmathematik**

Institut für Operations und Information Systems

WS 2022

Liebe Studierende!

Diese Beispielsammlung beinhaltet Übungsbeispiele zu sämtlichen relevanten Kapiteln der Lehrveranstaltungen aus Wirtschaftsmathematik. Die Übungsaufgaben sind so gewählt, dass sie Ihnen einen Überblick über den Stoff der Wirtschaftsmathematik geben und so die Lehrveranstaltungen ergänzen. Mit den Erläuterungen aus der Vorlesung und den Übungen sollten Sie die Aufgaben lösen können. Sie finden zu allen Beispielen die Lösungen im Anschluss an die Angabe, um Ihnen eine Kontrolle Ihres Lösungsweges zu ermöglichen.

Einige Beispiele sind mit V (Video) markiert. Diese finden sich komplett durchgerechnet und erklärt in Form von Videos auf der Moodle-Seite der Vorlesung Wirtschaftsmathmatik (z.B. finden Sie Beispiel 2.11 V unter „Übungsbeispiele Blatt 2“ im Video „Blatt 2_Beispiel 11“). Sie können sich jederzeit zu dieser Vorlesung anmelden und haben dadurch Zugriff auf diese Videos.

Thomas Ebner, Oktober 2022

# Übungen zu Blatt 1

1.1 $\boxed{\text{V}}$ Gegeben ist eine $3 \times 3$ Matrix $A = (a_{ij})$ mit

$$a_{ij} = \begin{cases} 2^{j-1} & \text{für} \quad i = 1 \\ \frac{j}{i} & \text{für} \quad j \geq i > 1 \\ i + j & \text{sonst} \end{cases}$$

eine Matrix $B^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, ein Zeilenvektor $u = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ sowie ein Spaltenvektor $v = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a) Schreiben Sie die Matrix $A$ an!

b) Berechnen Sie $u \cdot v$.

c) Berechnen Sie – wenn möglich: $A \cdot B$ und $B \cdot A$.

Lösung:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & \frac{3}{2} \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$;

b) $u \cdot v = (2) = 2$

c) $A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 2 \\ -1 & 12 \end{pmatrix}$; $B \cdot A$ nicht möglich

1.2 Die Matrix $B = (b_{ij})$ ist eine $m \times n$-Matrix mit $m = 3$ und $n = 3$ und

$$b_{ij} = \begin{cases} j & \text{für} \quad i = 1 \\ i \cdot j & \text{für} \quad j > i > 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Weiters sind gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad x^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

a) Schreiben Sie die Matrix $B$ an!

b) Berechnen Sie – wenn möglich: $A \cdot B$, $A + B$ und $B \cdot x$

Lösung: $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $A \cdot B$ nicht möglich; $A + B$ nicht möglich; $\begin{pmatrix} 9 \\ 24 \\ 0 \end{pmatrix}$

1.3 $\boxed{\text{V}}$ Gegeben sind die regulären (invertierbaren) $n \times n$-Matrizen $A$, $B$, C und $X$. Lösen Sie die folgenden Matrizengleichungen nach der Matrix $X$ auf

a) $(A - B) \cdot X = -B \cdot X + C$

b) $A - \left(X^T \cdot B^T\right)^T + E \cdot X = A \cdot X - B + E^T$

Lösung:

a) $X = A^{-1} \cdot C$;

b) $X = E$

1.4 Gegeben sind die regulären (invertierbaren) $n \times n$-Matrizen $A$, $B$, C und $X$. Lösen Sie die folgenden Matrizengleichungen nach der Matrix $X$ auf

$$X^{-1} \cdot (A + B) = C + \left(A^{-1} \cdot X\right)^{-1}$$

Lösung: $X = B \cdot C^{-1}$

1.5 $\boxed{\text{V}}$ Gegeben sind die Vektoren $a = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Skizzieren Sie die beiden Vektoren in einem geeigneten Koordinatensystem.

Bestimmen Sie den Vektor $c = a + 2 \cdot b$ ($c$ heißt „Linearkombination“ von $a$ und $b$), skizzieren Sie ihn in einem geeigneten Koordinatensystem und berechnen Sie seinen Betrag (Länge).

Lösung:

$c = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}$, $|d| = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$

1.6 $\boxed{\text{V}}$ Eine neu gegründete österreichische Ratingagentur bewertet die Kreditrisiken österreichischer Firmen und gibt dabei jeder Firma eines der drei folgenden Ratings: AAA (sehr gute Bonität), BBB (gute Bonität) oder CCC (schlechte Bonität). Aus historischen Daten hat die Agentur folgende Übergangswahrscheinlichkeiten für die drei Ratingklassen errechnet:

Firmen mit dem Rating AAA bekommen im nächsten Jahr in 25% der Fälle das Rating BBB und in 25% der Fälle das Rating CCC, der Rest behält AAA.

Firmen mit dem Rating BBB bekommen im nächsten Jahr in 75% der Fälle wieder das Rating BBB und in 25% der Fälle das Rating CCC.

Firmen mit dem Rating CCC bekommen im nächsten Jahr zu 100% wieder das Rating CCC.

a) Erstellen Sie eine passende Übergangsmatrix.

b) Wie viele Firmen werden voraussichtlich *nächstes* Jahr in den jeweiligen Ratingklassen sein, falls heuer 1600 Firmen das Rating AAA, 1200 Firmen das Rating BBB und 800 Firmen das Rating CCC haben.

c) Die inverse Matrix der Übergangsmatrix ist durch

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Berechnen Sie mit Hilfe von $M$, wie viele Firmen *heuer* in den jeweiligen Ratingklassen sind, falls nächstes Jahr 300 Firmen das Rating AAA, 600 Firmen das Rating BBB und 600 Firmen das Rating CCC haben.

d) Wie viele Firmen werden voraussichtlich in fünf Jahren das Rating AAA haben, wenn heuer 3200 Firmen in der Ratingklasse AAA sind.

Lösung:

a) $U = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.25 & 0.25 \\ 0 & 0.75 & 0.25 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} 1600 & 1200 & 800 \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} 800 & 1300 & 1500 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 300 & 600 & 600 \end{pmatrix} \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 600 & 600 & 300 \end{pmatrix}$;

d) 100

1.7 $\boxed{\text{V}}$ Ein Unternehmen stellt aus drei Rohstoffen jeweils zwei Zwischenprodukte und daraus zwei Endprodukte her. Der Materialverbrauch (in Mengeneinheiten) ist in folgenden Tabellen zusammengestellt:

| | Zwischenprodukte | |
|---|---|---|
| Rohstoffe | $Z_1$ | $Z_2$ |
| $R_1$ | 1 | 2 |
| $R_2$ | 2 | 2 |
| $R_3$ | 3 | 1 |

| | Zwischenprodukte | |
|---|---|---|
| Endprodukte | $Z_1$ | $Z_2$ |
| $E_1$ | 2 | 4 |
| $E_2$ | 1 | 3 |

Des weiteren werden für die Herstellung einer Einheit des Endproduktes $E_1$ zusätzlich drei Einheiten des Rohstoffes $R_2$, sowie für die Herstellung einer Einheit des Endproduktes $E_2$ zusätzlich zwei Einheiten des Rohstoffes $R_2$ benötigt.

a) Geben Sie unter Verwendung von Matrizenrechnung den Gesamtbedarf der Rohstoffe $R_1$, $R_2$, $R_3$ für jeweils ein Stück $E_1$ bzw. $E_2$ in Form einer Matrix an.

b) Welche Rohstoffmengen sind zur Herstellung von drei Stück $E_1$ und zwei Stück $E_2$ erforderlich?

c) Berechnen Sie die Gesamtkosten dieser Produktion für folgende Rohstoffpreise

| $R_1$ | $R_2$ | $R_3$ |
|---|---|---|
| 2 | 4 | 1 |

d) Das Unternehmen bezieht von einem weiteren Lieferanten in zwei unabhängigen Lieferungen für seine Produktion die zwei Rohstoffe $R_1$, $R_2$, zu den Preisen $p_1$, $p_2$. Die Liefermengen und der jeweilige Rechnungsbetrag sind in nachstehender Tabelle gegeben:

| Lieferung | 1 | 2 |
|---|---|---|
| $R_1$ | 1 | 2 |
| $R_2$ | 2 | 6 |
| Rechnungsbetrag in GE | 11 | 28 |

Bestimmen Sie die Rohstoffpreise $p_1$, $p_2$ mit Hilfe eines linearen Gleichungssystems.

Lösung:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A \cdot B + C = \begin{pmatrix} 10 & 7 \\ 12 & 8 \\ 10 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 7 \\ 15 & 10 \\ 10 & 6 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 10 & 7 \\ 15 & 10 \\ 10 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 44 \\ 65 \\ 42 \end{pmatrix}$;

c) 390

d) $p_1 = 5$, $p_2 = 3$

1.8 $\boxed{\text{V}}$ Bestimmen Sie alle Lösungen der linearen Gleichungssysteme:

a)
$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & & & = & 0 \\ & & 3y & + & 2z & = & 24 \\ 4x & - & y & + & 3z & = & 30 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 1 \\ x & - & y & + & z & = & 1 \\ 3x & & & + & 5z & = & 1 \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & 2x_4 & = & 6 \\ -2x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & = & -8 \\ -4x_1 & + & x_2 & - & 4x_3 & - & x_4 & = & -12 \\ & - & x_2 & & & - & 3x_4 & = & 4 \end{array}$$

Lösung:

a) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$;

b) keine Lösung;

c) $X = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $t, s \in \mathbb{R}$

1.9 a) Bestimmen Sie die Determinante der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & a & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ in Abhängigkeit von $a$!

b) Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist die Matrix A regulär?

c) Bestimmen Sie die Determinante der Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 9 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Welche Besonderheit können Sie sich hier zunutze machen?

Lösung: a) $det\,(A) = 1 - 5a$; b) $a \neq \frac{1}{5}$; c) $24$

1.10 $\boxed{\text{V}}$ Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{R}$, für die das System

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & z & = & 2 \\ x & - & y & + & 3z & = & 4 \\ x & + & y & + & (a^2-5)z & = & a \end{array}$$

a) keine Lösung,
b) eine eindeutige Lösung,
c) unendlich viele Lösungen besitzt!

Lösung:

a) $a^2 - 4 = 0$ und $a - 2 \neq 0$ somit $a = -2$;
b) $a^2 - 4 \neq 0$;
c) $a^2 - 4 = 0$ und $a - 2 = 0$, somit $a = 2$.

1.11 Bestimmen Sie den Rang der folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 1 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösung: $Rg\,(A) = 4$; $Rg\,(B) = 2$; $Rg\,(C) = 3$

1.12 $\boxed{\text{V}}$ Gegeben sind die Matrix $A$ und der Vektor $b$:

$$A = \begin{pmatrix} 2-t & 3 & 6 \\ 3 & 2-t & -6 \\ -6 & -6 & 11 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad t \in \mathbb{R}$$

a) Für welche Werte von $t \in \mathbb{R}$ besitzt $Ax = 0$ eine nichttriviale Lösung?
b) Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist $Ax = b$ lösbar?

Lösung:

a) z.B.: $det \begin{pmatrix} 2-t & 3 & 6 \\ 3 & 2-t & -6 \\ -6 & -6 & 11 \end{pmatrix} = 11t^2 - 44t - 55 = 0$ für $t = 5$ bzw. $t = -1$;

b) Für $t \neq 5$ und $t \neq -1$ ist $rg(A) = 3$ und $Ax = b$ eindeutig lösbar, für $t = 5$ keine Lösung, für $t = -1$ unendlich viele Lösungen.

1.13 Gegeben ist eine Matrix $A$ und der Vektor $b$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & a \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{mit } a \in \mathbb{R}$$

a) Für welche Werte $a \in \mathbb{R}$ besitzt das Gleichungssystem $A \cdot x = 0$ nur die triviale Lösung?

b) Für welche Werte $a \in \mathbb{R}$ besitzt das Gleichungssystem $A \cdot x = b$ keine Lösung?

c) Ist es möglich, dass das Gleichungssystem $A \cdot x = b$ hier unendlich viele Lösung besitzt? Begründen Sie!

Lösung: a) $a \neq -1$; b) $a = -1$; c) nein

1.14 $\boxed{\text{V}}$ Gegeben sind die Vektoren $x = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \end{pmatrix}$ und $z = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

a) Stellen Sie den Vektor $u = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ als Linearkombination von $x$ und $z$ dar und veranschaulichen Sie diesen Sachverhalt graphisch.

b) Was erhalten Sie, wenn Sie den Vektor $u$ als Linearkombination von $y$ und $z$ darzustellen versuchen?

Lösung:

a) $\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, klar;

b) nicht möglich, da $y$ und $z$ linear abhängig sind.

1.15 Gegeben sind die vier Vektoren:

$$a = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad c = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad d = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

a) Sind die Vektoren $a$ und $b$ linear unabhängig?

b) Sind $b$, $c$ und $d$ linear unabhängig?

Lösung: a) ja; b) ja, z.B.: $Rg \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 3$

1.16 $\boxed{\text{V}}$ Gegeben ist die Matrix $A$ und der Vektor $b$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

a) Berechnen Sie die Inverse der Matrix A und führen Sie eine Probe durch!

b) Bestimmen Sie nun mit Hilfe der Inversen die eindeutige Lösung des Gleichungssystems $A \cdot x = b$!

Lösung:

a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$; Probe: $A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

b) $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

1.17 Gegeben ist die folgende Matrix A mit einer Konstanten $a \in \mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & a & a \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Für welche $\alpha$ existiert die Matrix $A^{-1}$?

b) Berechnen Sie für $a = 1$ die Matrix $A^{-1}$!

Lösung: a) $a \neq \frac{1}{2}$; b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

# Übungen zu Blatt 2

2.1 $\boxed{\text{V}}$ Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke:

a) $\dfrac{(2x^n)^2}{(3x^{n-3})^3 \cdot x^9} : \dfrac{(x^{n+1})^3}{3^2 x^n} =$

b) $\dfrac{2x^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[5]{x^{-4}}}{\sqrt{4x}} =$

c) $\sqrt{\dfrac{a+b}{a^2} \cdot \sqrt[3]{\dfrac{(a \cdot b)^2}{64a + 64b}}} =$

Lösung:

a) $\dfrac{4}{3} x^{-3n-3}$

b) $\dfrac{1}{x^{\frac{29}{30}}}$

c) $\dfrac{1}{2} \cdot \sqrt[3]{\dfrac{(a+b) \cdot b}{a^2}}$

2.2 Vereinfachen Sie die gegebenen Terme soweit möglich:

a) $\dfrac{(-x^3 y)^2}{(x^2 y^3)^3} : \left(\dfrac{xy}{x^3 y^3}\right)^{-2} =$

b) $\dfrac{4^{\frac{n-1}{4}}}{4^{\frac{-n-1}{4}} \cdot 2^n} =$

c) $\dfrac{x - \frac{y}{3}}{y - \frac{x}{3}} : (3x - y) =$

d) $\dfrac{(2n)^{-3} : (2n)^2}{\frac{2^{-5-n} \cdot n^3}{2^{1-2n} \cdot n^{-4}}} =$

e) $\dfrac{1}{a^2 + ab} + \dfrac{b}{a^3 - a^2 b} - \dfrac{b^2}{a^4 - a^2 b^2} =$

f) $\sqrt{\dfrac{80 \cdot x^{-2} \cdot y^3 \cdot (x - y)}{5 \cdot (x \cdot y)^{-3} \cdot (x^2 - y^2)\, x^4 \cdot y^2 \cdot x^{-5}}} \cdot x^0 =$

Lösung: a) $\dfrac{1}{x^4 y^{11}}$; b) 1; c) $\dfrac{1}{3y - x}$; d) $\dfrac{2^{1-n}}{n^{12}}$; e) $\dfrac{1}{a^2 - b^2}$; f) $4 \cdot \sqrt{\dfrac{x^2 y^4}{x + y}}$

2.3 $\boxed{\text{V}}$ Bestimmen Sie jeweils die Definitionsmenge der folgenden Gleichungen, lösen Sie die Gleichungen nach der Variablen $x$ auf und geben Sie die Lösungsmenge an:

a) $(3x-6)^2-(9-2x)^2=35$

b) $(x-3)\cdot(x+1)\cdot(x-\frac{1}{2})=0$

c) $4-\sqrt{5x+11}=0$

d) $\sqrt{x^3-64}\cdot\frac{x^2-1}{\sqrt{x^2+1}}=0$

Lösung:

a) $D=\mathbb{R},\ x_1=-4,\ x_2=4$

b) $D=\mathbb{R},\ x_1=3,\ x_2=-1,\ x_3=\frac{1}{2}$

c) $D=\left\{x\in\mathbb{R}\ \middle|\ x\geq-\frac{11}{5}\right\},\ x=1$

d) $D=\{x\in\mathbb{R}\ |x\geq 4\},\ x=4$

2.4 Bestimmen Sie jeweils die Definitionsmenge der folgenden Gleichungen, lösen Sie die Gleichungen nach der Variablen $x$ auf und geben Sie die Lösungsmenge an:

a) $\sqrt{6x+7}=2x+1$

b) $\sqrt{x-1}-\sqrt{x-3}=1$

c) $\frac{3x+2}{2x-1}=\frac{6x-1}{4x-5}$

d) $\frac{1}{2x-2}-\frac{3}{2x}=\frac{-1}{x+2}$

Lösung:

a) $D=\left\{x\in R\ \middle|\ x\geq-\frac{7}{6}\right\},\ x=\frac{3}{2}$

b) $D=\{x\in R\ |x\geq 3\},\ x=\frac{13}{4}$

c) $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2};\frac{5}{4}\right\};\ x=11$

d) $D=\mathbb{R}\setminus\{-2;0;1\};\ x=2$

2.5 Bestimmen Sie jeweils die Definitionsmenge der folgenden Gleichungen, lösen Sie die Gleichungen nach der Variablen $x$ auf und geben Sie die Lösungsmenge an:

a) $\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{3+x}}-\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}=0$

b) $x^3-x^2-2x=0$

Lösung:

a) $D=\mathbb{R}_{++},\ L=\{1\}$

b) $D=\mathbb{R};\ L=\{-1;0;2\}$

2.6 $\boxed{\text{V}}$ Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke:

a) $\dfrac{6!}{4!2!}$

b) $\dfrac{n!}{(n-3)!}$

c) $\dfrac{(2n)!}{(2n-2)!2!}$

Lösung:

a) $15$

b) $n \cdot (n-1) \cdot (n-2)$

c) $n \cdot (2n-1)$

2.7 $\boxed{\text{V}}$ Geben Sie die Lösungsmenge der folgenden Ungleichungen über $\mathbb{R}$ an:

a) $x^2 + x - 2 < 0$

b) $|x-2| > x^2$

c) $\dfrac{x+1}{x-1} < 3$

Lösung:

a) $L = \,]-2;\, 1[$

b) $L = \,]-2;\, 1[$

c) $L = \,]-\infty; 1[\, \cup \,]2; \infty[$

2.8 Lösen Sie die folgenden Ungleichungen in $\mathbb{R}$:

a) $\dfrac{-7}{2x-6} \;\leq\; 1$

b) $\dfrac{x}{x-4} < -\dfrac{1}{3}$

c) $\dfrac{x^2-2x}{3} < 1$

Lösung:

a) $L = \left]-\infty;\; -\dfrac{1}{2}\right] \cup \,]3;\; \infty[$

b) $L = \,]1; 4[$

c) $L = \,]-1; 3[$

2.9 Lösen Sie die folgenden Betragsungleichungen in $\mathbb{R}$:

a) $|2x+5| < 17$

b) $|x + |x|| \geq 2$

Lösung:

a) $]-11; 6[$

b) $[1;\; \infty[$

2.10 Lösen Sie die folgende Betragsungleichung in $\mathbb{R}$:

$$\frac{2}{|2x+6|} < 1$$

Lösung: $]-\infty;\ -4[\,\cup\,]-2;\ \infty[$

2.11 $\boxed{\text{V}}$ Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke:

a) $\log_a(\mathrm{a}^{\log_a(a^2)}) =$

b) $\ln\left(\dfrac{\mathrm{e}^3}{\mathrm{e}+3}\right) =$

c) $\log_3(9) + \log_3(27x) - \log_3(9x) =$

Lösung:

a) 2

b) $3 - \ln(e+3)$

c) 3

2.12 $\boxed{\text{V}}$ Bestimmen Sie die Definitionsmenge und lösen Sie folgende Gleichungen nach der Variablen $x$ auf:

a) $2\log_5(3x+1) = \log_5(6x+10)$

b) $x^{\ln(x)+2} = e^3$

Lösung:

a) 1

b) $x_1 = \dfrac{1}{e^3},\ x_2 = e;\ L = \left\{\dfrac{1}{e^3}; e\right\}$

2.13 a) Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke:

i. $\ln\left(\dfrac{5\mathrm{x}^3}{(x+1)^2}\right) =$

ii. $2 \cdot \log_{10}(x) + \log_{10}(2x) - 4 \cdot \log_{10}(x) =$

b) Bestimmen Sie die Definitionsmenge und lösen Sie folgende Gleichungen nach der Variablen $x$ auf:

i. $9 \cdot 3^{x+1} = 81^{2x-1}$

ii. $3 = \log_2(8x+16) - \log_2(5x-2)$

Lösung:

a)

i. $\ln(5) + 3 \cdot \ln(x) - 2 \cdot \ln(x+1)$

ii. $\log_{10}\left(\dfrac{2}{x}\right)$

b) i. $D = \mathbb{R},\ L = \{1\}$

ii. $D = \left]\frac{5}{2};\infty\right[;\ x = 1$

2.14 $\boxed{\text{V}}$ Berechnen Sie:

$$a)\ \sum_{i=0}^{3} i \cdot 2^{i+1} \qquad b)\ \sum_{k=1}^{120} 5$$

Lösung:
a) 68; b) 600

2.15 Berechnen Sie die folgenden Summen:

$$a)\ \frac{5!}{2!\cdot 3!}\cdot\sum_{j=0}^{2}\frac{j^2}{5\cdot(j+2)} \qquad b)\ \sum_{k=1}^{3}(-1)^k\cdot k^{k-1} \qquad c)\ \sum_{i=2}^{5}2^{-2i}\cdot 3^{i-2}$$

Lösung: a) $\frac{8}{3}$; b) -8; c) $\frac{175}{1024}$

2.16 $\boxed{\text{V}}$ Berechnen Sie die folgende Doppelsumme:

$$\sum_{k=0}^{1}\sum_{i=10}^{13}\frac{i}{k+1}$$

Lösung: 69

2.17 Berechnen Sie die folgenden Doppelsummen:

$$a)\ \sum_{i=2}^{4}\sum_{j=1}^{8}\left(\frac{1}{5}\cdot i\cdot j\right) \qquad b)\ \sum_{k=1}^{4}\sum_{i=2}^{10}\frac{1}{10}\cdot k^2\cdot i$$

Lösung: a) $\frac{324}{5}$; b) 162

2.18 $\boxed{\text{V}}$ Gegeben sind die Mengen $A = \{a, b, c\}$ und $B = \{a, b, 1, 2\}$. $\mathcal{P}(A)$ ist die Potenzmenge von $A$. Stimmen die folgenden Aussagen und wenn nicht, wie lautet eine mögliche wahre Aussage?

$a)\ \{b\} \in A \qquad b)\ \{1,2\} \subset B \qquad c)\ \{a,b\} \in A \qquad d)\ \{a,\ b\} \in \mathcal{P}(A) \qquad e)\ \{a,\ b\} \in A\cap B$

Lösung: Richtig ist etwa:

a) $b \in A$
b) $\{1, 2\} \subset B$
c) $\{a, b\} \subset A$
d) $\{a,\ b\} \in \mathcal{P}(A)$
e) $\{a, b\} = A \cap B$

2.19 Gegeben sind die Mengen $A = \{a, 1, 2, 3, 4\}$ und $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Stimmen die folgenden Aussagen und wenn nicht, wie lautet die wahre Aussage?

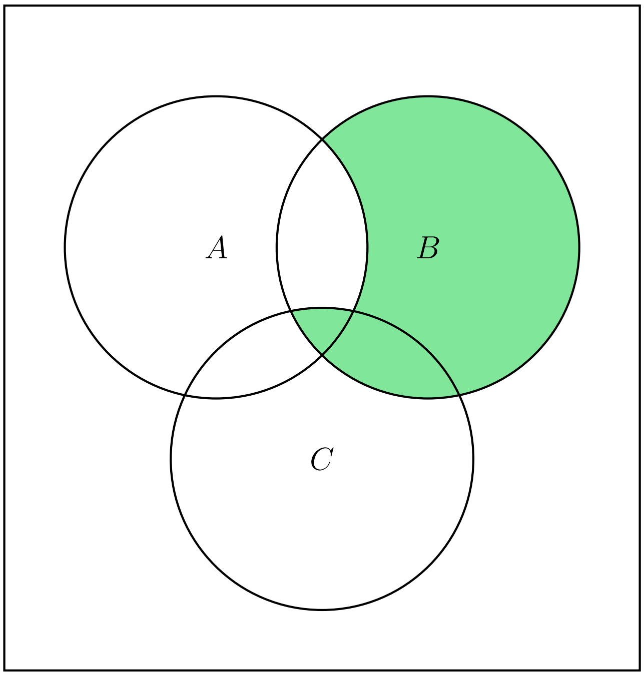
$$a)\ 1 \in A \qquad b)\ \{2,3\} \subset A \qquad c)\ \{2,3\} \in B \qquad d)\ \{2\} \in A \cap B$$

Lösung: a) richtig; b) richtig; c) falsch; d) falsch

2.20 $\boxed{\text{V}}$ Skizzieren Sie ein Diagramm mit drei Mengen – sämtlich Teilmengen einer Grundmenge G – *im allgemeinsten Fall* und schraffieren Sie folgende Menge:

$$(A \cap (C \backslash \overline{B})) \cup (B \backslash A)$$

Lösung:

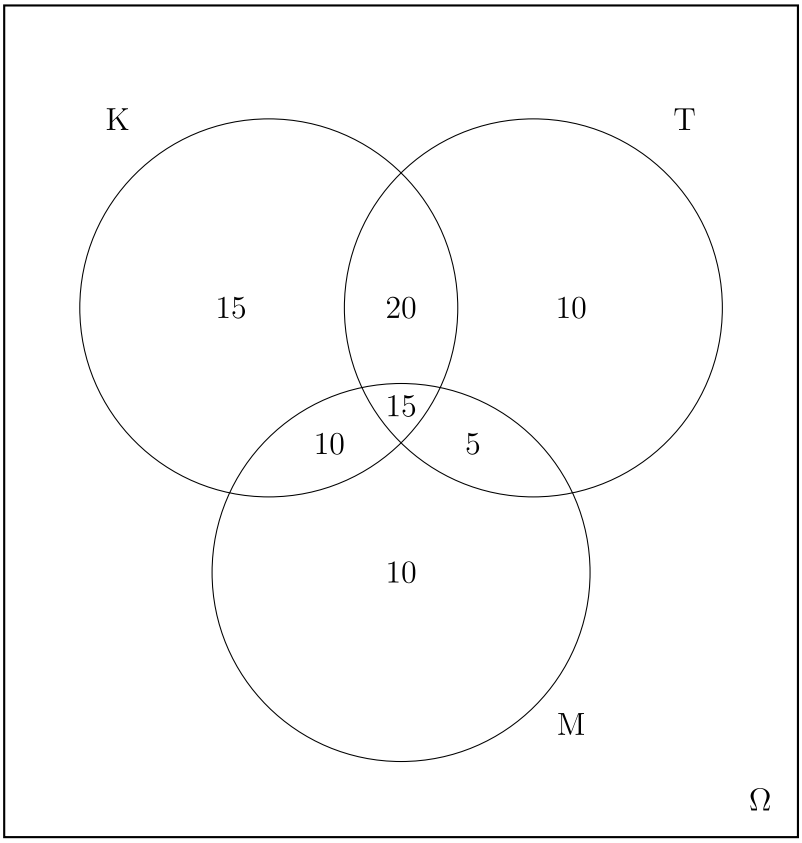


2.21 $\boxed{\text{V}}$ Unter 90 Befragten waren 60 Personen, die gerne Kaffee trinken, 50 Personen, die gerne Tee trinken und 40 Personen, die gerne Milch trinken. Diese Zahlen schließen 35 Personen ein, die gerne Kaffee und Tee trinken, 25 Personen, die gerne Kaffee und Milch trinken und 20 Personen, die gerne Tee und Milch trinken. Diese Zahlen wiederum schließen 15 Personen ein, die gerne Kaffee, Tee und Milch trinken.

a) Erstellen Sie ein Venn Diagramm des Sachverhaltes.

b) Bestimmen Sie wie viele Personen keines der Getränke gern trinken!

Lösung:

a) 


b) 5

2.22 Bei einer Ausschreibung werden Kenntnisse in mindestens einer der Sprachen Englisch, Chinesisch oder Russisch verlangt. Von insgesamt 90 Bewerbern können 30 nur Englisch, 17 nur Chinesisch und 9 nur Russisch. 29 Personen beherrschen genau 2 Sprachen.

a) Wie viele Bewerber können alle drei Sprachen?
b) Wie viele Bewerber können nur Chinesisch und Russisch, falls 58 der Bewerber Englisch können?

Lösung: a) 5; b) 6

2.23 $\boxed{\text{V}}$ Gegeben sind die folgenden vier Mengen:

$$M_1 = \{x \in \mathbb{R} \,|\, 0 < x \leq 6\} \qquad M_2 = \{x \in \mathbb{N} \,|\, x^3 < 64\} \qquad M_3 = [1\,;\,7] \qquad M_4 = \{1, 5\}$$

a) Skizzieren Sie diese Mengen auf einer Zahlengeraden der reellen Zahlen
b) Bestimmen Sie den Durchschnitt $\bigcap_{i=1}^{4} M_i$ aller vier Mengen!
c) Bestimmen Sie die Vereinigung $\bigcup_{i=1}^{4} M_i$ aller vier Mengen!
d) Bestimmen Sie das kartesische Produkt von $M_2$ und $M_4$!
e) Bestimmen Sie die Komplementmenge von $M_1$ bezüglich $\mathbb{R}$!
f) Bestimmen Sie die symmetrische Differenz von $M_1$ und $M_3$!
g) Bestimmen Sie - falls möglich - die Potenzmenge der Menge $M = M_4 \cup \{0\}$!

Lösung:

a) klar
b) $\{1\}$
c) $]0;\ 7]$
d) $M_2 \times M_4 = \{(1,1)\,;(2,1)\,;(3,1)\,;(1,5)\,;(2,5)\,;(3,5)\}$
e) $C_R\,(M_1) = \mathbb{R} \setminus\, ]0;\ 6] = \,]{-\infty};\ 0] \cup\, ]6;\ \infty[$
f) $M_1 \Delta M_3 = \,]0;\ 1[\, \cup\, ]6;\ 7]$
g) $\mathcal{P}(M) = \{\{\,\}\,;\{0\}\,;\{1\}\,;\{5\}\,,\{0,1\}\,;\{0,5\}\,;\{1,5\}\,;\{0,1,5\}\}$

2.24 $\boxed{\text{V}}$ Zeichnen bzw. schraffieren Sie die folgenden Mengen in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Welche dieser Mengen sind konvex? (Hinweis: Eine Menge heißt konvex, wenn sie zu je zwei beliebigen Punkten auch deren ganze Verbindungsstrecke enthält.)

a) $A = \{(x, y) \mid 6x + 3y = 12 \ \wedge\ x > 0\}$
b) $B = \{(x, y) | (y \leq 2 - x) \wedge (x \geq 0) \wedge (y > 0)\}$
c) $C = \{(x,\, y) \mid (x - 5)^2 + y^2 \geq 25\}$

Lösung: Video

2.25 Skizzieren Sie auf einer Zahlengeraden der reellen Zahlen folgende Mengen:

$M_1 = \{x \in \mathbb{R} \,|\, 0 < x \leq 6\}$ $\qquad M_2 = \{x \in \mathbb{N} \,|\, 0 < x \leq 5\}$ $\qquad M_3 = [1\,;\,7]$ $\qquad M_4 = \{1, 5\}$

a) Bestimmen Sie den Durchschnitt $\bigcap\limits_{i=1}^{4} M_i$ aller vier Mengen!

b) Bestimmen Sie die Komplementmenge von $M_1 \cup M_3$ bezüglich $\mathbb{R}$!

Lösung: a) $\{1, 5\}$; b) $\mathbb{R} \setminus\, ]0;\, 7]$

2.26 Zeichnen bzw. schraffieren Sie die folgenden Mengen in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Ist diese Mengen konvex? (Hinweis: Eine Menge heißt konvex, wenn sie zu je zwei beliebigen Punkten auch deren ganze Verbindungsstrecke enthält.)

a) $A = \{(x, y) | (y \leq 2 - x) \wedge (y \leq 2 + x) \wedge (y > 0)\}$

b) $B = \{(x, y) | (x - 1)^2 + y^2 < 9 \wedge (y \leq x) \wedge (y > -x)\}$

Lösung: https://www.wolframalpha.com

# Übungen zu Blatt 3

3.1 $\boxed{\text{V}}$ Untersuchen Sie die durch ihr Bildungsgesetz angegebenen Folgen auf Monotonie, Beschränktheit und Konvergenz:

a) $a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$

b) $b_n = (-1)^n \cdot n^2$

Lösung:

a) Es gilt: $a_{n+1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{3} \cdot a_n < a_n$. Daher ist die Folge streng monoton fallend. Da alle Folgenglieder positiv sind, ist die Folge auch beschränkt. Als Grenzwert ergibt sich: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

b) alternierend, wegen $|b_n| = n^2$ ist die Folge auch nicht beschränkt und somit nicht konvergent.

3.2

a) Gegeben ist eine arithmetische Folge mit $d = 9$.

i. Bestimmen Sie $a_{11}$, wenn $a_1 = 25$ ist!

ii. Bestimmen Sie $a_{15}$, wenn $a_7 = 28$ ist!

iii. Berechnen Sie die Summe der ersten 10 Folgenglieder wenn $a_1 = 25$ ist!

b) Gegeben ist eine geometrische Folge mit $q = 3$.

i. Bestimmen Sie $a_6$, wenn $a_1 = 10$ ist!

ii. Bestimmen Sie $a_{11}$, wenn $a_7 = 5$ ist!

iii. Berechnen Sie $s_8$, wenn $a_1 = 10$ ist.

Lösung:

a) i) $a_{11} = 115$; ii) $a_{15} = 100$; ii) $s_{10} = 655$

b) i) $a_6 = 2430$; ii) $a_{11} = 405$; iii) $s_8 = 32800$

3.3 $\boxed{\text{V}}$ Gegeben ist eine arithmetische Folge mit $d = 3$.

a) Bestimmen Sie $a_{20}$, wenn $a_1 = 100$ ist!
b) Bestimmen Sie $s_{20}$, wenn $a_1 = 100$ ist!
c) Berechnen Sie $a_1$ wenn die Summe der ersten 20 Folgenglieder $s_{20} = 2190$ beträgt!

Lösung:

a) $a_{20} = 157$
b) $s_{20} = 2570$
c) $a_1 = 81$

3.4 $\boxed{\text{V}}$ Gegeben ist eine geometrische Folge mit $q = \dfrac{1}{3}$.

a) Bestimmen Sie $a_6$, wenn $a_1 = 81$ ist!
b) Bestimmen Sie $a_{11}$, wenn $a_7 = 5$ ist!
c) Berechnen Sie $s_6$, wenn $a_1 = 27$ ist.
d) Berechnen Sie $a_1$, wenn $s_3 = 117$ ist!

Lösung:

a) $a_6 = a_1 \cdot q^5 = 81 \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^5 = \dfrac{3^4}{3^5} = \dfrac{1}{3}$

b) $a_{11} = a_7 \cdot q^4 = 5 \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^4 = \dfrac{5}{3^4} = \dfrac{5}{3^4} = \dfrac{5}{81}$

c) $s_6 = a_1 \cdot \dfrac{1-q^6}{1-q} = 27 \cdot \dfrac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^6}{1-\frac{1}{3}} = 27 \cdot \dfrac{1-\frac{1}{3^6}}{\frac{2}{3}} = 27 \cdot \dfrac{\frac{3^6-1}{3^6}}{\frac{2}{3}} = 3^3 \cdot \dfrac{3 \cdot (3^6-1)}{2 \cdot 3^6} = \dfrac{3^6-1}{2 \cdot 3^2} = \dfrac{728}{2 \cdot 9} = \dfrac{364}{9}$

d) $s_3 = a_1 \cdot \dfrac{1-q^3}{1-q}$; $117 = a_1 \cdot \dfrac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^3}{1-\frac{1}{3}} \Rightarrow a_1 = 81$

3.5 $\boxed{\text{V}}$ Vier Zahlen sind die ersten vier Glieder einer geometrischen Folge mit $q > 0$. Der Quotient aus dem dritten und dem ersten Glied beträgt $\dfrac{1}{4}$. Das vierte Glied lautet 80. Wie groß ist die Summe der vier Glieder?

Lösung:

$\dfrac{a_3}{a_1} = q^2 = \dfrac{1}{4} \Rightarrow q = \dfrac{1}{2}$. $a_1 = \dfrac{80}{q^3}$; $a_1 = 640$. $s_4 = a_1 \cdot \dfrac{1-q^4}{1-q} = 640 \cdot \dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^4}{1-\frac{1}{2}} = 1200$. Oder einfach: $640 + 320 + 160 + 80 = 1200$.

3.6 $\boxed{\text{V}}$ Bestimmen Sie die Grenzwerte:

$$a)\ \lim_{n\to\infty} n\cdot\frac{2-\frac{3}{2^n}}{5n+1} \qquad b)\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-2}{2n+1}-n\cdot\frac{3+n}{2n-1}\right)$$

Lösung:

a) umformen ergibt: $\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\dfrac{2-\frac{3}{2^n}}{5n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2-\frac{3}{2^n}}{5+\frac{1}{n}}=\dfrac{2}{5}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-2}{2n+1}-n\cdot\dfrac{3+n}{2n-1}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{-8n^2-7n+2}{4n^2-1}\right)=-2$

3.7 Bestimmen Sie die Grenzwerte:

$$a)\ \lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)^2}{4n^2+n+1}= \qquad b)\ \lim_{n\to\infty}\frac{8n^5+9n^3+9}{-2n^6+3n^2}=$$

$$c)\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2}{n^2-n}\right)^2= \qquad d)\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n(n+1)}{n+2}-\frac{2n^3}{n^2+2}\right)=$$

Lösung: a) $1$; b) $0$; c) $4$; d)$-2$

3.8 $\boxed{\text{V}}$ Geben Sie zu den Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jeweils die zugehörige Reihe $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an, indem Sie die Partialsummen $S_n$ berechnen. Geben Sie im Fall der Existenz den Grenzwert der zugehörigen Reihe an!

a) $a_n=3^n$

b) $a_n=2^{-n}$

Lösung:

a) $S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=\sum\limits_{i=1}^{n}3^i=\sum\limits_{i=1}^{n}(3)^i=\dfrac{1}{2}\cdot 3^{n+1}-\dfrac{3}{2}$, geometrische Reihe mit $q=3$, daher $S_n\to\infty$

b) $S_n=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}}=1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right)=1$

3.9 Konvergieren die folgenden Reihen? Wenn ja, was ist ihre Summe?

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{2n} \cdot 3^{1-n}$

b) $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{5^{j-1}}{5^{2j+1}}$

c) $\sum\limits_{i=1}^{\infty} (-1)^{2i} \cdot \sqrt{\frac{3^{2i}}{9^{1+3i}}}$

Lösung: a) nicht konvergent da $q = \frac{4}{3}$; b) $\frac{1}{100}$; c) $\frac{1}{24}$

3.10 $\boxed{\text{V}}$ Prüfen Sie, ob die folgenden Reihen konvergieren. Wenn ja, was ist ihre Summe?

$$a)\ \sum_{i=0}^{\infty} 2^{2i+1} \cdot 7^{-i+1} \qquad\qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+2}}$$

Lösung:

a) konvergent, geometrische Reihe mit $q = \frac{4}{7}$. $S = \frac{98}{3}$.

b) divergent, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge.

3.11 Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergieren die folgenden geometrischen Reihen?

a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3x-1}{2}\right)^n$

b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^{\frac{n}{2}}}{x^n}$

Lösung: a) $\left]-\frac{1}{3}; 1\right[$; b) $x \in [-2;\ -1[ \cup ]2;\ \infty[$

3.12 $\boxed{\text{V}}$ Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die folgende geometrische Reihe:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(2x+3)^{\frac{i}{2}}}{x^i}$$

Lösung: $\left[-\frac{3}{2};\ -1\right[ \cup \left]3;\ \infty\right[$

Fertigen Sie für die folgenden Aufgaben jeweils eine graphische Darstellung der Zahlungsströme an und lösen Sie dann die Aufgaben. Geben Sie sämtliche Zwischenschritte zur Bestimmung der jeweiligen Lösung an. Das Anschreiben einer Formel alleine genügt nicht!

3.13 $\boxed{\text{V}}$ Eine Studentin zahlt am Beginn jeden Monats 50 Euro auf ihr Sparbuch ein und erhält dafür einen Zinssatz von 0,4 % p.a., wobei sie mit den Einzahlungen am 1. Jänner beginnt.

a) Geben Sie zunächst die Summe der Zinsen, die sie in einem Jahr bekommt, an und vereinfachen Sie diese Summe mit Hilfe eines Summenzeichens. (Hinweis: für Zeiträume unter einem Jahr werden Zinsen linear verrechnet).

b) Berechnen Sie nun die Summe der Zinsen und ziehen Sie die KESt in Höhe von 25 % ab. Wie viel Geld hat sie am Ende des Jahres dann am Sparbuch?

Lösung:

a) $50 \cdot 0,004 + 50 \cdot 0,004 \cdot \frac{11}{12} + 50 \cdot 0,004 \cdot \frac{10}{12} + \cdots + 50 \cdot 0,004 \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{60} \cdot \sum_{i=1}^{12} i;$

b) Zinsen vor KESt: 1,3; Zinsen nach KESt: $1,3 \cdot 0,75 = 0,975$; Endbetrag daher: 600,975.

3.14 $\boxed{\text{V}}$ Ein Unternehmen plant in eine Produktionsanlage zu investieren. Zum Anschaffungszeitpunkt $t = 0$ fällt eine Anfangsinvestition von $CF_0 = 1000$ Geldeinheiten an. Der Kalkulationszinssatz $i$ ist 2%.

a) Berechnen Sie den Kapitalwert $K$ für das Investitionsprojekt, wenn das Unternehmen eine Nutzungsdauer von 10 Jahren unterstellt und die Produktionsanlage einen konstanten jährlichen Cashflow in der Höhe von $CF_t = 150$ Geldeinheiten erwirtschaftet. Hinweis: $\left(\frac{1}{1,02}\right)^{10} \approx 0,82$.

b) Die Produktionsanlage erzeugt einen konstanten jährlichen Cashflow in der Höhe von $CF_t = 50$ Geldeinheiten für die Jahre $t = 1, 2, 3, \ldots$. Berechnen Sie den Kapitalwert $K$ für das Investitionsprojekt, wenn das Unternehmen eine unendliche Nutzungsdauer unterstellt.

c) Die Produktionsanlage erzeugt im ersten Jahr einen Cashflow von $CF_1 = 10$ Geldeinheiten und kann den Cashflow in jedem folgenden Jahr um 1 Geldeinheiten steigern. Berechnen Sie den Kapitalwert $K$ für das Investitionsprojekt, wenn das Unternehmen eine Nutzungsdauer von $N = 101$ Jahren und einen Kalkulationszinssatz $i$ von 0% unterstellt.

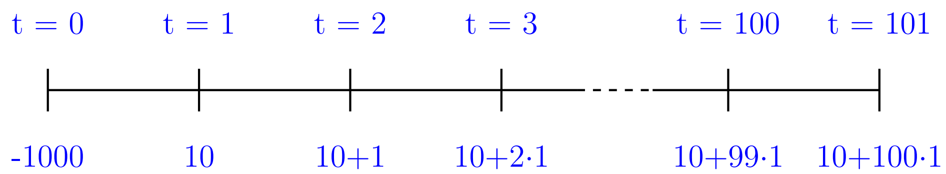
Lösung:

a) exakt: $K = -1000 + 150 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{1,02}\right)^{10}}{1 - \frac{1}{1,02}} \cdot \frac{1}{1,02} = 347,4;$

gerundet: $\left(\frac{1}{1,02}\right)^{10} \approx 0,82$ und $150 \cdot 9 \approx 1350$; somit $K = -1000 + 1350 = 350$

b) $K = -1000 + 50 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{1.02}} \cdot \frac{1}{1.02} = 1500$

c)




z. B.: die Cashflows bilden eine arithmetische Folge mit $a_1 = 10$ und $d = 1$, die Summe der 101 Einzahlungen ergibt sich zu: $s_{101} = \frac{101}{2} \cdot (10 + 110) = 6060$. Unter Berücksichtigung der Auszahlung zu t = 0 ergibt sich ein Kapitalwert von $K = -1000 + 6060 = 5060$.

3.15 Ein Unternehmen plant in eine Produktionsanlage zu investieren. Zum Anschaffungszeitpunkt $t = 0$ fällt eine Auszahlung $A$ von € 100.000.- an. Die jährlichen (konstanten) Einzahlungen $E$ betragen € 20.000. Der Zinssatz ist $i = 0,1$. Verwenden Sie zur Berechnung $\left(\frac{1}{1,1}\right)^5 \approx 0,62$ bzw. $\left(\frac{1}{1,1}\right)^{10} \approx 0,39$!

a) Berechnen Sie den Kapitalwert $K$ für das Investitionsprojekt in zwei Szenarien: Die Nutzungsdauer $n$ der Anlage betrage im ersten Szenario 5 Jahre, im zweiten 10.

b) Berechnen Sie den Kapitalwert $K$ für das Investitionsprojekt, wenn die Geschäftsleitung eine unendliche Nutzungsdauer unterstellt!

Lösung: a) 1) -24.000; 2) 22.000; b) 100.000.-

3.16 V Herr L. möchte ein unbebautes Grundstück von Frau R. erwerben. Es stehen ihm zwei Finanzierungsmöglichkeiten A und B zur Wahl.

Variante A: Herr L. zahlt sofort 10.000.- und weitere 9.000.- nach zwei Jahren (also zu $t = 2$).

Variante B: Herr L. zahlt sofort 10.000.- und (beginnend mit $t = 1$) am Ende jeden Jahres drei Jahre lang 2.700.-.

a) Welche Variante ist bei einem (unrealistischen) Zinssatz von i = 0,5 p.a. für Herrn L. günstiger?

b) Ab wie vielen Jahresraten ist Variante A für Herrn L. günstiger (vorausgesetzt, der Zinssatz bleibt unverändert auf 50%)? Geben Sie eine Gleichung zur Bestimmung der Anzahl der Jahresraten an und lösen Sie diese nach der gesuchten Größe auf. Der exakte Zahlenwert muss nicht berechnet werden.

c) Ab welcher Jahresrate ist für Herrn L. die Variante A vorzuziehen (vorausgesetzt, der Zinssatz bleibt unverändert auf 50%)?

Lösung:

a) $BW_A = 10000 + 9000 \cdot \left(\frac{1}{1,5}\right)^2 = 14000;$

$$BW_B = 10000 + 2700 \cdot \frac{1}{1,5} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{1,5}\right)^3}{1-\frac{1}{1,5}} = 13800;$$

Also ist aus Sicht von Herrn H die Variante B vorzuziehen.

b) $14000 < 10000 + 2700 \cdot \frac{1}{1,5} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{1,5}\right)^x}{1-\frac{1}{1,5}} \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x < \frac{14}{54} \Rightarrow x > \frac{\ln\left(\frac{14}{54}\right)}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)} \iff x > 3,329$, (also – wie bereits offensichtlich zu erkennen – ab 4 Jahresraten);

c) $14000 < 10000 + R \cdot \frac{1}{1,5} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{1,5}\right)^3}{1-\frac{1}{1,5}} \Rightarrow R > \frac{54000}{19} \approx 2842,1$

3.17 Über welches Guthaben kann kann man am Ende von drei Jahren verfügen, wenn man bei einer Verzinsung mit einem (unrealistischen) Zinssatz von $i = \frac{1}{4}$ p.a. drei Jahre lang, jeweils am Jahresende 1600 EUR auf ein Konto einzahlt?

Lösung: 6100 EUR

3.18 Bei einem Zinssatz von $r$ % p.a. effektiv werden Zinsen am Ende des Jahres gutgeschrieben, d.h. am Ende des Jahres werden dem Kapital $K$ Zinsen in der Höhe von $K \cdot r$ zugeschlagen. Bei einem Zinssatz von $r$ % p.a. nominell, 2 mal (halbjährlich) verrechnet, werden dem Kapital halbjährlich Zinsen in der Höhe von $\frac{r}{2}$ % zugeschlagen. Welcher effektive Jahreszinssatz ist äquivalent zu einem nominellen Zinssatz von 20 % p.a, der zweimal unterjährig verrechnet wird?

Lösung: 21%

# Übungen zu Blatt 4

4.1 $\boxed{\text{V}}$ Gegeben sind die Mengen

$$M_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \quad \text{und} \quad M_2 = \{-1, 0, 1, 2\}$$

sowie die Zuordnungsvorschrift $f : M_1 \to M_2$, $x \mapsto f(x)$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x \text{ gerade und } x > 2 \\ -1 & \text{für} \quad x \leq 2 \\ 1 & \text{für} \quad x \text{ ungerade und durch 3 teilbar} \\ 2 & \text{sonst} \end{cases}$$

a) Skizzieren Sie diese Zuordnungsvorschrift in einem Pfeildiagramm und begründen Sie, warum durch die Vorschrift $f$ eine Funktion definiert ist!

b) Bestimmen Sie jeweils die Bildmenge der Mengen $\{1, 2, 3\}$ und $\{4, 6\}$.

c) Ist die Funktion $f$ injektiv, surjektiv, bijektiv? Existiert eine Inverse zu $f$? Begründen Sie!

Lösung:

a) klar. Jedem $x \in M_1$ wird genau ein $f(x) \in M_2$ zugeordnet

b) $Im(\{1, 2, 3\}) = \{-1, 1\}$, $Im(\{4, 6\}) = \{0\}$

c) f ist surjektiv, da jeder Wert aus $M_2$ mindestens einmal als Funktionswert auftritt. f ist nicht injektiv, da z. B. $-1$ öfter als einmal als Funktionswert auftritt, somit ist f auch nicht bijektiv und es existiert keine Umkehrfunktion.

4.2 Gegeben sind die folgenden Funktionen:

$$i)\ f_1(x) = \sqrt{x} \qquad f_2(x) = \frac{1}{x}$$
$$ii)\ f_3(x) = ln(x) \qquad f_4(x) = e^x$$

a) Skizzieren Sie diese Funktionen *ohne* Erstellung einer Wertetabelle.

b) Bestimmen Sie jeweils den größtmöglichen Definitionsbereich der Funktionen und geben Sie die jeweilige Bildmenge an!

c) Untersuchen Sie für alle Funktionen anhand der Skizze Monotonie, Beschränktheit sowie das Verhalten im Unendlichen!

d) Welche dieser Funktionen sind als Abbildungen von $D \to \mathbb{R}$ injektiv, surjektiv, bijektiv?

Lösung: https://www.wolframalpha.com

4.3 Gegeben sind die folgenden Funktionen:

$$f(x) = 2 - \frac{1}{3}x \qquad g(x) = -\frac{1}{2} \cdot x^2 + 2$$

a) Skizzieren Sie diese Funktionen *ohne* Erstellung einer Wertetabelle.

b) Bestimmen Sie jeweils den größtmöglichen Definitionsbereich der Funktionen und geben Sie die jeweilige Bildmenge an!

c) Untersuchen Sie für alle Funktionen anhand der Skizze Monotonie, Beschränktheit sowie das Verhalten im Unendlichen!

d) Welche dieser Funktionen sind als Funktionen von $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijektiv?

Lösung: https://www.wolframalpha.com

4.4 a) Gegeben ist die Funktion:

$$f(x) = \sqrt{x+3} \cdot e^{-\frac{1}{x}}$$

i. Bestimmen Sie die größtmögliche Definitionsmenge $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}$ von $f(x)$!

ii. Bestimmen Sie die erste Ableitung von $f$ und vereinfachen Sie soweit möglich!

b) Gegeben ist die Funktion:

$$g(x) = e^{x-1} - 1$$

i. Bestimmen Sie die größtmögliche Definitionsmenge $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}$ von $g(x)$! und geben Sie die Bildmenge an!

ii. Berechnen Sie eventuelle Nullstellen und skizzieren Sie den Graphen der Funktion g.

iii. Bestimmen Sie nun die erste Ableitung und untersuchen Sie, ob die Funktion über ihrem Definitionsbereich (streng) monoton fallend bzw. steigend ist?

iv. Bestimmen Sie die zweite Ableitung und untersuchen Sie die Funktion auf Konvexität (Konkavität) in ihrem Definitionsbereich!

Lösung:

a) i) $D = [-3; \infty[ \setminus \{0\}$; ii) $f'(x) = \dfrac{e^{-\frac{1}{x}} \cdot (x^2 + 2x + 6)}{2 \cdot x^2 \cdot \sqrt{x+3}}$

b) i) $D = \mathbb{R}$; $Im(f) = ]-1; \infty[$; b) Nullstelle: $x = 1$; c) st. m. steigend; d) konvex

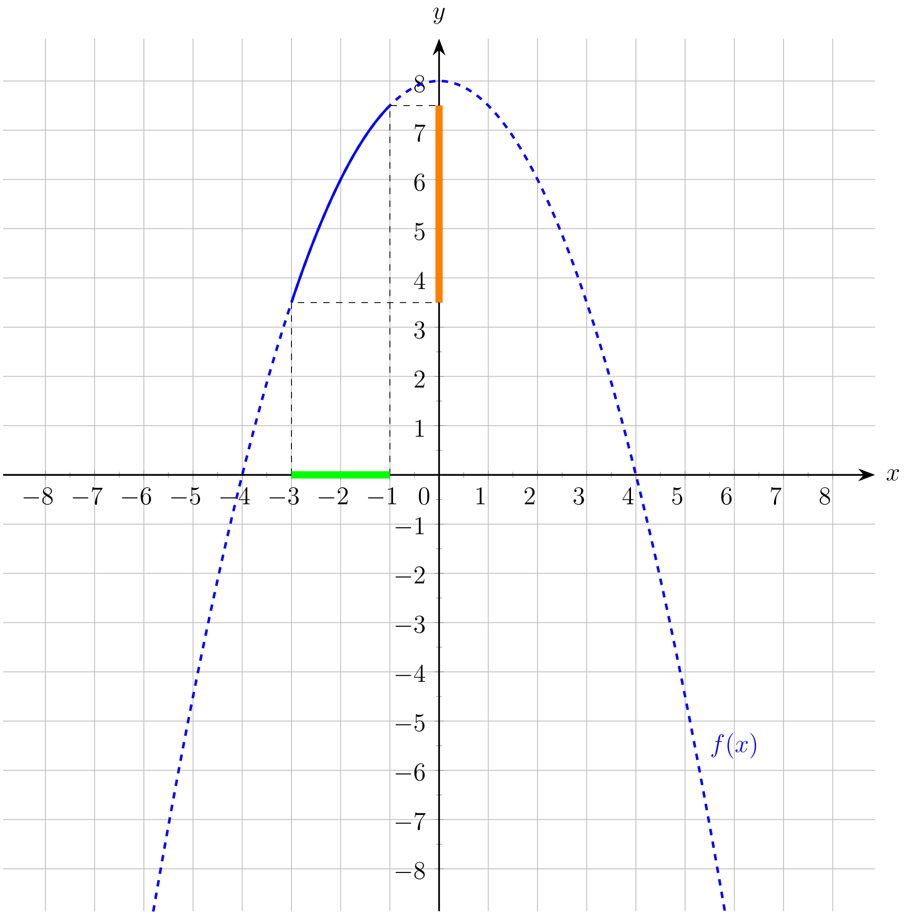
4.5 $\boxed{\text{V}}$ Für welche reellen Zahlen $x$ ist die folgende Funktion $f(x)$ definiert?

$$f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$$

Lösung: $D = ]-\infty; -1[ \cup ]0; \infty[$

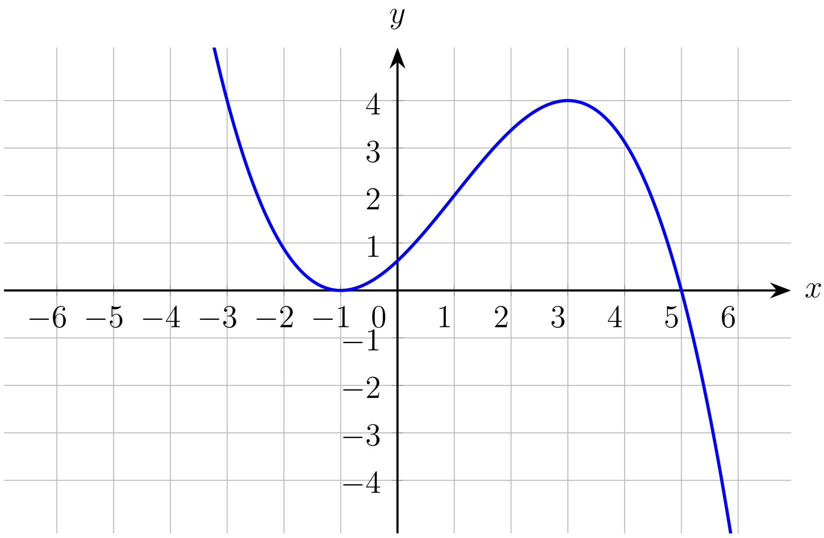
4.6 $\boxed{\text{V}}$ Bestimmen Sie, wenn möglich, die Inverse zur Polynomfunktion $f(x) = -\dfrac{1}{2}x^2 + 8$ im Intervall [-3, -1]!

Lösung:




$f^{-1} : \left[\frac{7}{2}; \frac{15}{2}\right] \to [-3; -1] : f^{-1}(y) = -\sqrt{16 - 2y}$

4.7 $\boxed{\text{V}}$ Die nachfolgende Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion. Skizzieren Sie die erste Ableitung dieser Funktion!




Lösung: klar

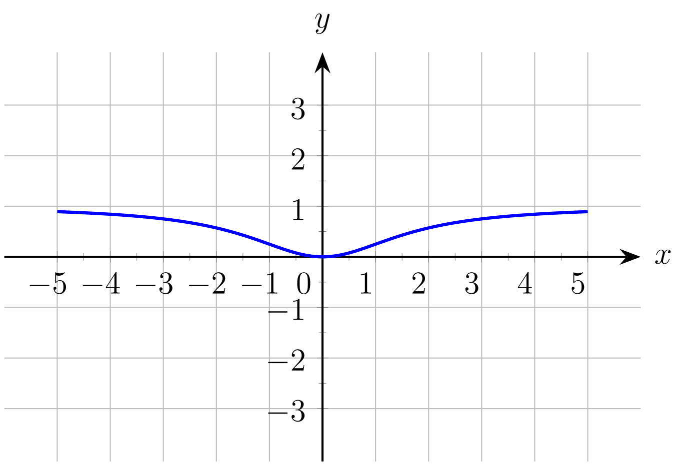
4.8 $\boxed{\text{V}}$ Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2+3}$$

Diskutieren Sie diese Funktion, d.h. bestimmen Sie die größtmögliche Definitionsmenge, Nullstellen, Extremstellen, Wendepunkte, Monotonie, das Krümmungsverhalten und das Verhalten im Unendlichen. Skizzieren Sie den Graphen!

Lösung:

$D = \mathbb{R}$; $f'(x) = \frac{6x}{(x^2+3)^2}$, $f''(x) = -\frac{18(x^2-1)}{(x^2+3)^3}$; $N(0/0) =$ Min; $W_1(1/\frac{1}{4})$, $W_2(-1/\frac{1}{4})$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$



4.9 $\boxed{\text{V}}$ Bestimmen Sie die Grenzwerte:

$$a)\ \lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-4} \qquad b)\ \lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}} \qquad c)\ \lim_{x\to 0^+} x^2\cdot\ln x$$

Lösung:

a) $\frac{1}{4}$; b) 0; c) 0

4.10 $\boxed{\text{V}}$ Gegeben ist die Funktion

$$f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}\ \text{ mit }\quad f(x)=e^{\frac{1}{2}x-1}$$

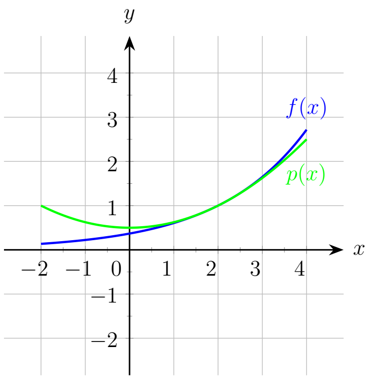
a) Bestimmen Sie das Taylor-Polynom $p(x)$ zweiten Grades mit Entwicklungsstelle $x_0 = 2$!

b) Approximieren Sie $e^{0,5}$ mit Hilfe des Polynoms aus a), indem Sie den Funktionswert von $p$ an der Stelle $x = 3$ berechnen!

Lösung:

a) $p(x) = 1 + \frac{1}{2}\cdot(x-2) + \frac{1}{8}(x-2)^2$

b) $e^{0,5} \approx p(3) = \frac{13}{8} = 1,625$, exakt: $e^{0,5} = 1,649$




4.11 $\boxed{\text{V}}$ Berechnen Sie sämtliche Stammfunktionen und das bestimmte Integral im Intervall $[0,1]$ für:

$$f(x) = e^{2x} + x^{\frac{1}{2}}$$

Hinweis: $\frac{e^2}{2} \approx 3,69$

Lösung:

$F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$; $\frac{1}{2}e^2 + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \approx 3,86$

4.12 Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = x \cdot e^{x-1}$$

a) Wie lauten die Nullstellen der Funktion f?

b) Wie lautet die erste Ableitung der Funktion f?

c) In welchem Bereich ist die Funktion f streng monoton steigend?

d) Bestimmen Sie Extremwerte und Wendepunkte der Funktion $f$.

Lösung: a) $x = 0$; b) $f'(x) = e^{x-1} \cdot (x+1)$; c) st. m .st. in $]-1;\, \infty[$

4.13 $\boxed{\text{V}}$ Bestimmen Sie:

$$a)\ \int x \cdot \ln(x^2)\, dx \qquad\qquad b)\ \int_0^1 x^2 \cdot (x^3+1)^5\, dx$$

Lösung:

a) $\displaystyle\int x \cdot \ln(x^2)\, dx = \frac{x^2}{2} \cdot \left(\ln\left(x^2\right) - 1\right) + C$

b) $\dfrac{7}{2}$

4.14 Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

$$a)\ \lim_{x\to 2} \frac{x-2}{x^2-4} \qquad b)\ \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-x+1}{x^2+x} \qquad c)\ \lim_{x\to 2} \frac{x^2}{x^2+1}$$

Lösung: a) $\dfrac{1}{4}$; b) 1; c) $\dfrac{4}{5}$

4.15

a) Gegeben ist die Funktion $f(x) = \dfrac{1}{4}x^2 - x$. Berechnen Sie die Fläche zwischen der Funktion und der $x$-Achse im Intervall $[-1;\, 1]$!

b) Wie groß ist die Fläche, welche der Graph der Funktion $f(x) = \dfrac{3}{x^2} - 3$ und die $x$-Achse im Intervall $[1; 3]$ einschließen?

(Hinweis: fertigen Sie eine Skizze an!)

Lösung: a) A = 1; b) A = 4

4.16 $\boxed{\text{V}}$ Skizzieren Sie die folgenden Funktionen und berechnen Sie, wenn möglich, die uneigentlichen Integrale:

$$a)\ \int_1^\infty \frac{3}{x^2}\, dx \qquad\qquad b)\ \int_0^\infty (1 + e^{-x})\, dx$$

Lösung:

a) 3;

b) kein endlicher Wert

4.17 $\boxed{\text{V}}$ Eine Grenzkostenfunktion ist gegeben durch $K^{'}(x) = 3x^2 - \frac{x}{2} + 2$.

a) Erklären Sie den Begriff Grenzkosten. Was gibt die Grenzkostenfunktion an?

b) Bestimmen Sie die Kostenfunktion, wenn für eine Produktion von zwei Einheiten Gesamtkosten in Höhe von 31 anfallen!

c) Wie hoch sind die Fixkosten der Produktion?

d) Welche Kosten fallen bei einer Produktion von $x = 4$ an und wie hoch sind an dieser Stelle die Grenzkosten?

e) Bestimmen Sie die Durchschnittskostenfunktion und deren Wert an der Stelle $x = 2$!

f) Das Produkt wird zu einem konstanten Preis von $p = \frac{55}{2}$ abgesetzt. Bestimmen Sie die Gewinnfunktion, die gewinnmaximale Ausbringungsmenge und den Maximalgewinn!

Lösung:

a) gibt die näherungsweise Kostenzunahme an, wenn die Erzeugungsmenge x, ausgehend von einer bestimmten Stelle, um eine Einheit erhöht wird;

b) $K(x) = x^3 - \frac{1}{4}x^2 + 2x + 20$;

c) $K(0) = 20$;

d) $K(4) = 88,\ K'(4) = 48$;

e) $D(x) = x^2 - \frac{1}{4}x + 2 + \frac{20}{x},\ D(2) = \frac{31}{2}$;

f) $G(x) = -x^3 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{51}{2}x - 20,\ x = 3,\ G(3) = \frac{127}{4}$

4.18 Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$a)\ \int x \cdot \ln(x^2)\, dx$

$b)\ \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{3x+1}}\, dx$

$c)\ \int_{-2}^{2} 3x \cdot e^{x^2} dx$

$d)\ \int_0^1 x \cdot (x^2+1)^5\, dx$

$e)\ \int_0^{\infty} \frac{1}{2} \cdot e^{3-x} dx$

$f)\ \int_2^{\infty} \frac{3}{x^2} dx$

Lösung: a) $\frac{1}{2}x^2 \cdot \left(\ln\left(x^2\right) - 1\right) + C$; b) $\frac{2}{3}$; c) 0; d) $\frac{21}{4}$ ; e) $\frac{1}{2} \cdot e^3$; f) $\frac{3}{2}$

4.19 $\boxed{\text{V}}$ Der S-förmige Kostenverlauf eines Betriebes wird durch ein Polynom 3. Grades beschrieben. Die Fixkosten der Produktion betragen 6 GE. Die Grenzkosten sind an der Stelle $x = 6$ minimal. Die Gesamtkosten an dieser Stelle betragen 42 GE. Die Grenzkosten an der Stelle $x = 0$ betragen 18 GE. Die Preis-Absatzfunktion lässt sich durch $p(x) = -\frac{3}{2}x + 18$ beschreiben.

a) Bestimmen Sie Höchstpreis und Sättigungsmenge!

b) Bestimmen Sie die Kostenfunktion $K(x)$, sowie die Erlösfunktion $E(x)$!

c) Ermitteln Sie die gewinnmaximale Ausbringungsmenge sowie den maximalen Gewinn!

d) Ab welcher Erzeugungsmenge gilt das Gesetz der schließlich zunehmenden Grenzkosten?

Lösung:

a) $p_{max} = 18,\ x = 12;$

b) $K(x) = \frac{x^3}{6} - 3x^2 + 18x + 6,\ E(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 18x;$

c) $x = 6,\ G_{max} = 12;$

d) ab $x = 6$

4.20 $\boxed{\text{V}}$ In einem Land gilt folgende Form einer progressiven Einkommensteuer:

| **Für Einkommensteile** | **Steuersatz** |
|---|---|
| 0 bis einschließlich 1000.- jährlich | 0% |
| über 1000.- bis einschließlich 6000.- jährlich | 10% |
| über 6000.- jährlich | 20% |

a) Erstellen Sie eine stückweise lineare Funktion $T(x)$, die die Höhe der abzuführenden Steuer in Abhängigkeit von der Höhe des Einkommens beschreibt und skizzieren Sie deren Graphen. Ist $T(x)$ differenzierbar und/oder stetig? Welche Monotonieeigenschaften hat $T(x)$?

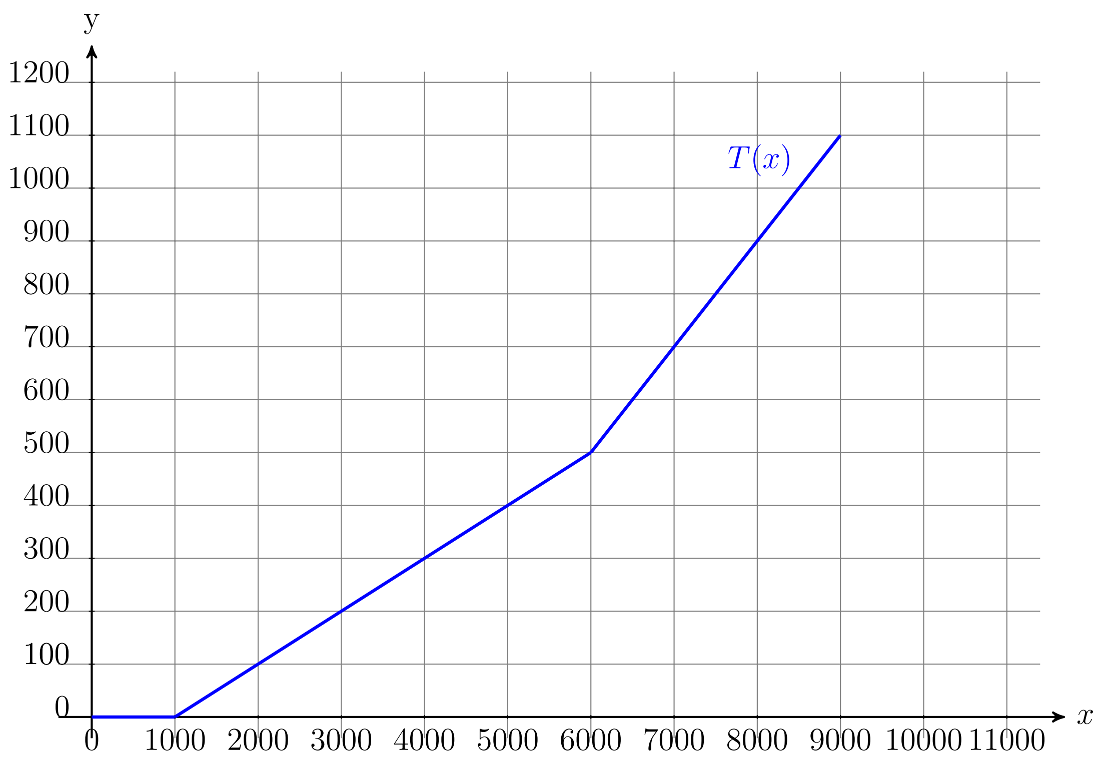
b) Bestimmen Sie die Grenzsteuerfunktion $T'(x)$ zur Steuerfunktion aus a) und skizzieren Sie deren Graphen.

c) Untersuchen Sie die Stetigkeit an der Stelle $x = 6000$. Welche Monotonieeigenschaften hat $T'(x)$?

d) Bestimmen Sie die zu entrichtende Einkommensteuer für ein Einkommen der Höhe 3500.-

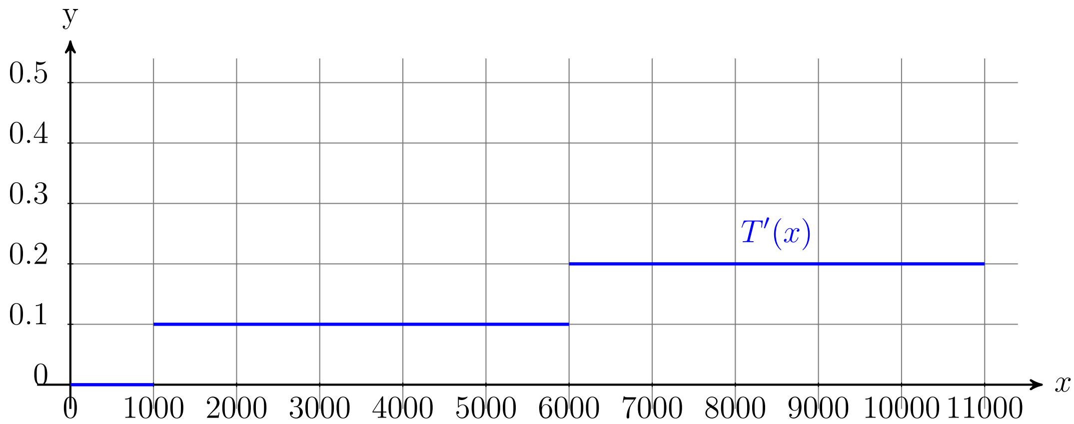
Lösung:

a) $$T(x) = \begin{cases} 0 & \text{wenn} \quad 0 \leq x \leq 1000 \\ (x - 1000) \cdot 0,1 & \text{wenn} \quad 1000 < x \leq 6000 \\ 500 + (x - 6000) \cdot 0,2 & \text{wenn} \quad x > 6000 \end{cases}$$




$T(x)$ stetig, aber nicht differenzierbar. Monoton steigend.

b) $T'(x) = \begin{cases} 0 & \text{wenn} \quad 0 \leq x < 1000 \\ 0,1 & \text{wenn} \quad 1000 < x < 6000 \\ 0,2 & \text{wenn} \quad x > 6000 \end{cases}$




An den Stellen $x=$ 1000, sowie $x=$ 6000 müsste man die Funktion $T'(x)$ stetig fortsetzen, um auch für Einkommen für exakt diese Beträge eine Grenzsteuerfunktion zu gewährleisten.

c) $\lim_{x \to 6000^-} T'(x) = 0,1$; $\lim_{x \to 6000^+} T'(x) = 0,2$; $T'(6000) = 0,1$. $T'(x)$ unstetig an den Sprungstellen, daher nicht differenzierbar; monoton steigend.

d) Für ein Einkommen in Höhe von 3500.- ist für die ersten 1000.- keine Steuer zu bezahlen. Für die über 1000.- hinausgehenden 2500.- ist eine 10%-ige Steuer zu entrichten, also 250.-. Die Belastung beträgt daher 250.-.

Denselben Betrag hätte man auch durch Einsetzen in die Steuerfunktion ermitteln können: da 3500.- in den Bereich zwischen 1000.- und 6000.- fällt kommt der mittlere Term zur Anwendung. Eingesetzt ergibt sich: $(3500 - 1000) \cdot 0,1 = 2500 \cdot 0,1 = 250$.

4.21 Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = 4 \cdot \ln\left(\sqrt{x+4} - 2\right)$$

a) Bestimmen Sie die größtmögliche Definitionsmenge!

b) Wie lauten die Koordinaten des Schnittpunktes mit der x-Achse?

c) In welchem Intervall ist die Funktion f streng monoton steigend?

Lösung: a)$D_f = ]0; \infty[$; b) x = 5; c) f streng monoton steigend in $]0; \infty[$

4.22 Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 15$$

a) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten der Funktion

b) Bestimmen Sie die Wendestelle der Funktion $f$!

Lösung: a) st. m. f. in $]-1; 3[$, st. m .st. in $]-\infty; -1[ \cup ]3; \infty[$; b) $x = 1$

4.23 Gegeben ist die folgende Kostenfunktion $K(x) = x^3 - \frac{1}{4}x^2 + 2x + 20$.

a) Bestimmen Sie die Durchschnittskostenfunktion und deren Wert an der Stelle $x = 2$!

b) Das Produkt wird zu einem konstanten Preis von $p = \frac{55}{2}$ abgesetzt. Bestimmen Sie die Gewinnfunktion, die gewinnmaximale Ausbringungsmenge und den Maximalgewinn!

Lösung:

a) $D(x) = x^2 - \frac{1}{4}x + 2 + \frac{20}{x}$, $D(2) = \frac{31}{2}$;

b) $G(x) = -x^3 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{51}{2}x - 20$, $x = 3$, $G(3) = \frac{127}{4}$

4.24 Für einen Monopolisten ist die Preis-Absatzfunktion $p(x) = 6 - \frac{1}{3}x$, Ferner kennt man seine Grenzkostenfunktion $K'(x) = 2x - 2$. Die Fixkosten betragen 9. Bestimmen Sie

a) den Term der Kostenfunktion,

b) die den Gewinn maximierende Angebotsmenge,

c) den zugehörigen Preis.

d) Wie hoch ist in diesem Fall der maximale Gewinn?

Lösung: a) $K(x) = x^2 - 2x + 9$; b) $x^* = 3$; c) $p^* = 5$; d) $G_{\max} = 3$

4.25 Die Nachfrage nach einem Gut unterliege folgender Preisabhängigkeit:

$$N(p) = 36 - p^2$$

a) Geben Sie einen sinnvollen Definitionsbereich an!

b) Bestimmen Sie die Grenznachfrage allgemein und für einen Preis von $p = 4$.

c) Um wie viel Prozent ändert sich die Nachfrage ungefähr, wenn sich der Preis, ausgehend von $p = 4$, um ein Prozent erhöht?

Lösung: a) $p \in [0;\ 6]$; b) -8; c) $\varepsilon_N(p) = \frac{N'(p) \cdot p}{N(p)} = \frac{-2p \cdot p}{36 - p^2} = \frac{-2p^2}{36 - p^2}$, $\varepsilon_N(4) = \frac{-2 \cdot 4^2}{36 - 4^2} = -\frac{32}{20} = -\frac{8}{5} = -1,6$

# Übungen zu Blatt 5

5.1 $\boxed{\text{V}}$ Gegeben ist eine Funktion in zwei Variablen

$$f : D \to \mathbb{R} \text{ mit } f(x,\, y) = 20x + 10y + 200$$

mit der Definitionsmenge $D = \{(x,\, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid \frac{1}{4}x^2 - y \leq 0 \wedge 2y + x \leq 4\}$.

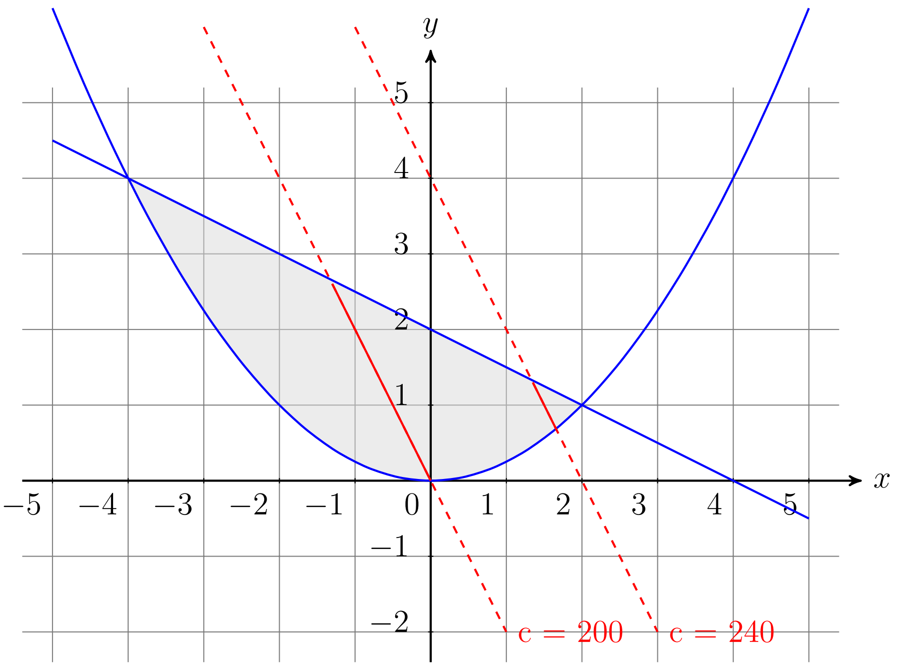
a) Schraffieren Sie in der $x$-$y$-Ebene den Definitionsbereich $D$.

b) Skizzieren Sie in der $x$-$y$-Ebene die Isoquanten $I_c$ dieser Funktion zu den Werten $c = 200$ und $c = 240$.

Lösung:

a) und

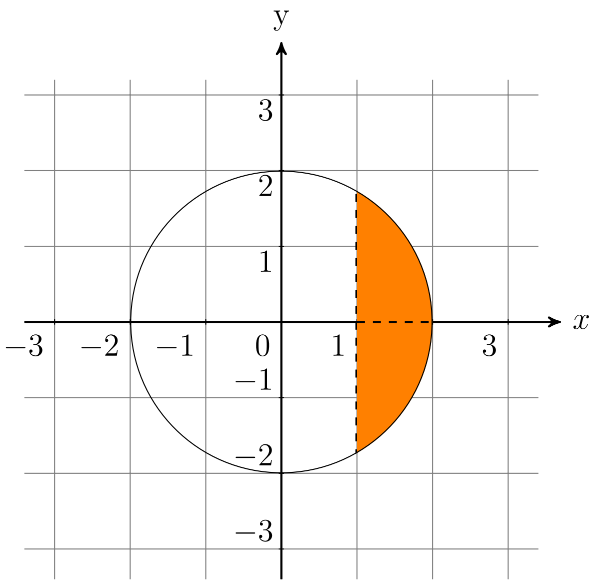
b)



5.2 Bestimmen Sie für die Funktion $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}{y \cdot \sqrt{\ln(x)}}$ die größtmögliche Definitionsmenge und skizzieren Sie diese in einem kartesischen Koordinatensystem.

Lösung:

$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \left(x^2 + y^2 \leq 4\right) \wedge (x > 1) \wedge (y \neq 0) \right\}$



5.3 $\boxed{\text{V}}$ Gegeben ist die Funktion $f(x, y) = x^3 + 2xy - 6y^2$.

a) Bestimmen Sie die ersten partiellen Ableitungen von $f$ – allgemein und an der Stelle $(2, 1)$.

b) Bestimmen Sie den Gradienten von $f$ – allgemein und an der Stelle $(2, 1)$. Interpretieren Sie Ihr Resultat.

c) Geben Sie die normierte Richtungsableitung von $f$ an der Stelle $(2, 1)$ in Richtung der beiden Einheitsvektoren, in Richtung des Vektors $z = (3, -4)$ und in Richtung des steilsten Funktionsanstiegs an! Interpretieren Sie Ihr Resultat.

Lösung:

a) $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial x} = f_x(x, y) = 3x^2 + 2y,$

$\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y} = f_y(x, y) = 2x - 12y,$

$f_x(2, 1) = 14,$

$f_y(2, 1) = -8$

b) $grad(f)(x, y) = \left(3x^2 + 2y, 2x - 12y\right),$

$grad(f)(2, 1) = (14, -8)$

c) für $z = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} : \dfrac{\partial f}{\partial z}(2, 1) = f_x(2, 1) = 14,$

für $z = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} : \dfrac{\partial f}{\partial z}(2, 1) = f_y(2, 1) = -8$

für $z = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} : \dfrac{\partial f}{\partial z}(2, 1) = \dfrac{1}{5} \cdot (14 \cdot 3 + (-8) \cdot (-4)) = \dfrac{74}{5}$

für $z = \begin{pmatrix} 14 \\ -8 \end{pmatrix}: \dfrac{\partial f}{\partial z}(2,\ 1) = \dfrac{1}{\sqrt{260}} \cdot (14,\ -8) \cdot \begin{pmatrix} 14 \\ -8 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt{260}} \cdot (260) = \sqrt{260} = 2 \cdot \sqrt{65} = |grad(f)(2, 1)|$

5.4 a) Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + 10x + 5y$$

i. Bestimmen Sie die ersten und zweiten partiellen Ableitungen!

ii. Ist die Funktion homogen?

iii. Bestimmen Sie die Richtung des steilsten Anstieges der Funktion an der Stelle $(1,2)$.

iv. Bestimmen Sie die Richtungsableitung der Funktion an der Stelle $(1,2)$ in Richtung des Vektors $z = (6,8)$.

b) Gegeben ist die Funktion von zwei Variablen:

$$f(x,y) = \frac{5x}{y^2}$$

i. Bestimmen Sie die größtmögliche Definitionsmenge der Funktion f.

ii. Bestimmen Sie die beiden ersten partiellen Ableitungen der Funktion f.

iii. Bestimmen Sie die partielle Ableitung nach $x$ im Punkt $P(0,1)$.

iv. Wie ändert sich der Funktionswert näherungsweise, wenn man – ausgehend von der Stelle $(0,1)$ – $x$ um $dx = 0,2$ und $y$ um $dy = -0,1$ Einheiten verändert?

Lösung:

a) i) $f_x(x,y) = 2x + y + 10$, $f_y(x,y) = x + 2y + 5$, $f_{xx}(x,y) = 2$, $f_{yy}(x,y) = 2$, $f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 1$; ii) nein; iii) $grad(f)(1,2) = (14,10)$; iv) $\frac{df}{dz} = \frac{1}{|z|} \cdot grad(f)(x_0,y_0) \cdot z = \frac{1}{10} \cdot (14,10) \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} = 16,4$

b) i) $D = \left\{(x,y) \in R^2 \,|y \neq 0\right\}$; ii) $f_x(x,y) = \frac{5}{y^2}$, $f_y(x,y) = -\frac{10x}{y^3}$; iii) $f_x(0,1) = 5$; iv)

5.5 $\boxed{\text{V}}$ Gegeben ist die Funktion $f(x,y) = x^3 + 6xy - 4y^2$.

a) Untersuchen Sie $f$ auf stationäre Stellen.

b) Wie lautet die Hesse Matrix.

c) Klassifizieren Sie nun die unter a) ermittelten stationären Stellen.

Lösung:

a) $f_x(x,y) = 3x^2 + 6y$

$f_y(x,y) = 6x - 8y$

$STS_1(0,0)$, $STS_2\left(-\frac{3}{2}, -\frac{9}{8}\right)$;

b) $H = \begin{pmatrix} 6x & 6 \\ 6 & -8 \end{pmatrix}$;

c) $f_{xx}(0,0) \cdot f_{yy}(0,0) - [f_{xy}(0,0)]^2 = 0 \cdot (-8) - 6^2 = -36 < 0$, daher Sattelpunkt;

$f_{xx}\left(-\frac{3}{2}, -\frac{9}{8}\right) = -9 < 0$ und $f_{xx}\left(-\frac{3}{2}, -\frac{9}{8}\right) \cdot f_{yy}\left(-\frac{3}{2}, -\frac{9}{8}\right) - \left[f_{xy}\left(-\frac{3}{2}, -\frac{9}{8}\right)\right]^2 =$
$(-9) \cdot (-8) - 6^2 = 36 > 0$, daher ist $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{9}{8}\right)$ Maximumstelle

5.6 Gegeben ist die Funktion in zwei Variablen

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto \left(x - y^2\right) \cdot e^{-x}$$

a) Ermitteln Sie die stationären Stellen von f.

b) Wie lautet die Hesse Matrix.

c) Klassifizieren Sie nun die unter a) ermittelten stationären Stellen.

Lösung:

a)

$f_x(x,y) = e^{-x} \cdot \left(y^2 - x + 1\right)$

$f_y(x,y) = -2y \cdot e^{-x}$

$STS(1,0)$

b) $H(x,y) = \begin{pmatrix} e^{-x} \cdot \left(-y^2 + x - 2\right) & 2y \cdot e^{-x} \\ 2y \cdot e^{-x} & -2e^{-x} \end{pmatrix}$

c) $H(1,0) = \begin{pmatrix} -e^{-1} & 0 \\ 0 & -2e^{-1} \end{pmatrix}$, $(0,1)$ ist lokale Maximumstelle ($f_{xx}(1,0) = -e^{-1} < 0$ und
$det(H(1,0)) = f_{xx}(1,0) \cdot f_{yy}(1,0) - [f_{xy}(1,0)]^2 = \left(-e^{-1}\right) \cdot \left(-2e^{-1}\right) - 0^2 = 2e^{-2} > 0$)

5.7 $\boxed{\text{V}}$ Gegeben sind die Nachfragefunktionen $(N^i)$ für drei Güter mit Preisen $p_i$ mit $i = 1,2,3$.

$$N^1(p_1,p_2,p_3) = 272 - 24p_1 - 22p_2^2 + 14p_3$$
$$N^2(p_1,p_2,p_3) = 256 - 10p_1^2 - 14p_2 + 2p_3$$
$$N^3(p_1,p_2,p_3) = 451 + 4p_1^2 + 6p_2^3 - \sqrt{25p_3}$$

Derzeit werden Gut 1 um 3 GE, Gut 2 um 2 GE und Gut 3 um 4 GE vertrieben.

a) Um wie viel Prozent ändert sich bei derzeitigen Preisen die Nachfrage nach Gut 1 ungefähr, wenn sich der Preis von Gut 3 um ein Prozent erhöht?

b) Um wie viel ändert sich bei derzeitigen Preisen die Nachfrage nach Gut 2 ungefähr, wenn der Preis von Gut 1 um 0,20 GE steigt, $p_2$ um 0,4 sinkt und der Preis des Gutes 3 um 20 Prozent steigt?

c) Bewirkt ein Steigen von $p_3$ – ausgehend von den derzeitigen Preisen – eine Erhöhung oder ein Absinken der Nachfrage $N^3$? Begründen Sie!

Lösung:

a) Kreuzpreiselastizität: $\varepsilon_{13} = \frac{N^1_{p_3} \cdot p_3}{N^1} = \frac{14 \cdot 4}{168} = \frac{1}{3}\%$.

b) totales Differential: $df = N^2_{p_1} \cdot dp_1 + N^2_{p_2} \cdot dp_2 + N^2_{p_3} \cdot dp_3$
$df = -20 \cdot p_1 \cdot dp_1 - 14 \cdot dp_2 + 2 \cdot dp_3 = -20 \cdot 3 \cdot 0,2 - 14 \cdot (-0,4) + 2 \cdot 0,8 = -12 + 5,6 + 1,6 = -4,8$

c) Grenznachfrage nach Gut 3 bezogen auf den Preis des Gutes 3: $\frac{\partial N^3}{\partial p_3} = N^3_{p_3} = \frac{-5}{2 \cdot \sqrt{p_3}} < 0$, speziell: $N^3_{p_3}(3,2,4) = \frac{-5}{4} < 0$ d. h. ein Steigen von $p_3$ bewirkt ein Absinken der Nachfrage nach Gut 3; speziell: ein Steigen von $p_3$ um eine Einheit bewirkt ein Absinken der Nachfrage nach Gut 3 um 1,25 Einheiten.

5.8 Betrachtet wird eine Funktion von zwei Variablen:

$$f(x,y) = \frac{6y^3 \cdot x}{\sqrt{x \cdot y}} - 12x^3$$

a) Bestimmen Sie die größtmögliche Definitionsmenge der Funktion f.

b) Ist diese Funktion homogen, wenn ja, von welchem Grad?

c) Wie lautet die erste partielle Ableitung nach y? (Hinweis: Vereinfachen Sie den gegebenen Funktionsterm, bevor Sie ableiten)

Lösung: a) $D = \left\{(x,y) \in R^2 \,|[(x>0) \wedge (y>0)] \vee [(x<0) \wedge (y<0)]\right\}$; b) ja, homogen vom Grad 3; c) $f_y(x,y) = 15x^{\frac{1}{2}} \cdot y^{\frac{3}{2}}$

5.9 $\boxed{\text{V}}$ Die Faktoreinsatzmengen für die Cobb-Douglas-Produktionsfunktion

$$f(A, K) = 2 \cdot A^{\frac{1}{2}} \cdot K^{\frac{3}{2}}$$

betragen $A = 100$, $K = 25$.

a) Geben Sie einen ökonomisch sinnvollen Definitionsbereich an.

b) Bestimmen Sie den Homogenitätsgrad.

c) Wie viele Einheiten von $A$ muss man näherungsweise zusätzlich einsetzen, um eine Einheit von $K$ zu ersetzen, wenn das Produktionsniveau dabei unverändert bleiben soll?

Lösung:

a) $D = \mathbb{R}_+^2$

b) homogen vom Grad 2;

c) Grenzrate der Substitution: „Arbeit für Kapital" $r_{AK} = \left|\frac{f_K}{f_A}\right| = \left|\frac{3A}{K}\right|$, $r_{AK}(100, 25) = \frac{3 \cdot 100}{25} = 12$, ausgehend von den Faktoreinsatzmengen $A = 100$, $K = 25$ benötigt man näherungsweise 12 Einheiten Arbeit, um eine Einheit Kapital zu ersetzen.

5.10 Gegeben ist die Funktion

$$f : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R} : f(x, y) = \sqrt{9x^3 y}$$

a) Zeigen Sie, dass es sich um eine Cobb-Douglas-Produktionsfunktion handelt.

b) Bestimmen Sie den Homogenitätsgrad.

c) Ermitteln Sie die partiellen Elastizitäten der Funktion bezüglich beider Faktoren.

d) Um wie viel Prozent steigt die Produktionsmenge näherungsweise, wenn – bei gleichbleibendem $y$ – der Inputfaktor $x$ um 2% erhöht wird?

Lösung: a) $f(x, y) = 3 \cdot x^{\frac{3}{2}} \cdot y^{\frac{1}{2}}$; b) 2; c) $\varepsilon_x = \frac{3}{2}$, $\varepsilon_y = \frac{1}{2}$; d) um näherungsweise 3 Prozent

5.11 Gegeben ist die Funktion:

$$f(x, y) = \frac{x^2 \cdot y}{x + 1}$$

a) Bestimmen Sie die beiden ersten partiellen Ableitungen!

b) Berechnen Sie näherungsweise mit Hilfe des totalen Differentials die Funktionswertänderung, wenn wenn man sich vom Punkt $(1,\ 2)$ in den Punkt $(2,\ \frac{5}{2})$ bewegt!

Lösung: $df = \frac{7}{4}$