

Wirtschaftsmathematik - Übungen WS 2026

Blatt 1: Lineare Algebra

1. Gegeben ist eine 4×3 Matrix $A = (a_{ij})$ mit

$$a_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{4} \cdot 2^{i+j} & \text{für } i < j \\ (-1)^j \cdot i & \text{für } i = j \\ i + j & \text{sonst} \end{cases}$$

eine Matrix $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, ein Zeilenvektor $u^T = (1 \ 0 \ -1)$ sowie ein Spaltenvektor $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

- Schreiben Sie die Matrix A an.
- Berechnen Sie $u^T \cdot v$.
- Berechnen Sie – wenn möglich: $A \cdot B^T$ und $B^T \cdot A$.

2. P 1 An der KF-Universität gibt es eine Mensa, in der es täglich zwei Menüs (M_1, M_2) sowie eine Salatbar (S) gibt. Die Mensa hat nur von 12:00 bis 14:00 Uhr geöffnet, und wir unterscheiden in diesem Zeitraum zwei Abschnitte: Zeitraum 1 (12:00–13:00) und Zeitraum 2 (13:00–14:00).

An einem typischen Tag wurden die folgenden Portionenzahlen verkauft:

$$B = \begin{pmatrix} 30 & 20 \\ 15 & 20 \\ 40 & 30 \end{pmatrix},$$

wobei die Zeilen die Angebote (M_1, M_2, S) und die Spalten die Zeiträume (Zeitraum 1, Zeitraum 2) repräsentieren.

Die Preise pro Portion sind durch den Zeilenvektor

$$p^T = (9 \quad 9 \quad 4)$$

(in Euro) gegeben.

- a) Beschreiben Sie in Worten, was der Eintrag B_{12} bedeutet. Was bedeuten die Einträge B_{31} und p_3 ?
- b) Berechnen Sie den Vektor

$$B \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}^T$$

und interpretieren Sie seine Einträge im Kontext der Mensa.

- c) Berechnen Sie die gesamten Tageseinnahmen der Mensa mittels Matrizenmultiplikation.
- d) Aufgrund einer Ferienregelung ändern sich die Verkaufszahlen. Die verkauften Mengen im Zeitraum 1 (erste Spalte der Matrix B) sollen unverändert bleiben, während die Mengen im Zeitraum 2 (zweite Spalte der Matrix B) auf 70 % der ursprünglichen Werte reduziert werden. Bestimmen Sie eine Matrix D so, dass die neuen Einträge in der Matrix B_{neu} durch eine Multiplikation der Matrizen B und D berechnet werden können. Begründen Sie kurz die Wahl Ihrer Einträge für D .

3. P 2 Für eine allgemeine 2×2 -Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

wird die Matrix $S = A^T \cdot A$ betrachtet.

- a) Weisen Sie durch direktes Ausrechnen nach, dass S stets existiert und symmetrisch ist. (Hinweis: Eine Matrix A heißt symmetrisch, wenn $A = A^T$)
- b) Zeigen Sie nun mit Hilfe der Rechenregeln für Matrizen, dass diese Eigenschaft für jede quadratische $n \times n$ -Matrix gilt.
- c) Geben Sie ein konkretes Beispiel einer Matrix A an, für die $A^T \cdot A$ symmetrisch, aber nicht die Einheitsmatrix ist. Berechnen Sie für ihr Beispiel explizit $A^T \cdot A$.

4. Gegeben sind die regulären (invertierbaren) $n \times n$ -Matrizen A , B , C und X . E ist die Einheitsmatrix der Dimension $n \times n$. Lösen Sie die folgenden Matrixgleichungen nach der Matrix X auf. Welche Bedingung muss dabei noch gelten?

a) $A \cdot (B + X \cdot C) = C$

b) $(A \cdot X^T)^T - X \cdot B + 3C = E$

5. P 3 U , V und W sind reguläre $n \times n$ -Matrizen und X eine unbekannte $n \times n$ -Matrix. E ist die $n \times n$ -Einheitsmatrix Gegeben ist die Matrixgleichung:

$$U \cdot X \cdot V - W \cdot X \cdot V = E$$

- a) Zeigen Sie, dass die Lösung dieser Gleichung

$$X = (V \cdot (U - W))^{-1}$$

lautet.

- b) Welche Bedingung muss außerdem erfüllt sein, damit die Lösung eindeutig ist?

6. In einem Staat gibt es nur zwei Parteien, D und R . Langfristige Beobachtungen des Wahlverhaltens der wahlberechtigten Personen bei einer Wahl haben ergeben, dass 70 % der Wählerinnen und Wähler von Partei D und 80 % der Wählerinnen und Wähler von Partei R ihrer Partei treu bleiben. Die Wählenden von Partei D wechseln zu 30 % zur Partei R , während sich umgekehrt 20 % der Wählenden von Partei R bei der folgenden Wahl für die Partei D entscheiden. Bei der letzten Wahl erhielt die Partei D 60 % und Partei R 40 % aller Stimmen.

- a) Geben Sie die zugehörige Übergangsmatrix an.
- b) Bestimmen Sie anhand dieser Matrix die zu erwartende Stimmenverteilung nach der nächsten Wahl.
- c) Wie viele der Wählerinnen und Wähler der Partei R müssen ihrer Partei treu bleiben, wenn die Partei R bei der nächsten Wahl ihren jetzigen Stimmenanteil auf 54 % steigern möchte und die Wählerinnen und Wähler der Partei D ihr Wahlverhalten beibehalten?
- d) Wie war die Stimmverteilung vor der letzten Wahl, wenn man annimmt, dass die Übergangsmatrix aus a) auch für die Vorperiode gegolten hat?

Hinweis: Für die Inverse einer 2×2 -Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ gilt: $A^{-1} = \frac{1}{a \cdot d - b \cdot c} \cdot$

$$\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

7. P 4 Im Bonusprogramm einer Fluggesellschaft gibt es drei Statusstufen: Basis (B), Komfort (K) und Premium (P). Langfristige Daten ergeben folgende jährliche Übergänge:
- Basis-Mitglieder bleiben zu 60 % in ihrer Stufe. Der Rest teilt sich im Verhältnis 3:1 auf die Stufen Komfort und Premium auf..
 - Komfort-Mitglieder fallen zu 20 % zurück in B , bleiben zu 50 % in K und steigen zu 30 % in P auf.
 - Premium-Mitglieder zeigen die höchste Treue: 70% behalten ihren Status. Wer wechselt, tut dies doppelt so häufig in den Status Komfort wie in den Status Basis.

Zu Beginn eines Jahres verteilen sich die Mitglieder wie folgt:

$$B : 40 \% , \quad K : 35 \% , \quad P : 25 \% .$$

- a) Stellen Sie die zugehörige Übergangsmatrix U auf.
- b) Bestimmen Sie die erwartete Verteilung der Mitglieder in den drei Statusstufen nach einem Jahr.
- c) Wie viele Mitglieder müssten aus dem Status K im folgenden Jahr mindestens in den Status P wechseln (Anteil in %), damit der Anteil der Premium-Mitglieder nach diesem Jahr auf 30 % steigt, wenn das Verhalten der Basis- und Premium-Mitglieder unverändert bleibt?

8. Im Rahmen der Textilproduktion eines Unternehmens sollen Sporthosen und Funktions-shirts hergestellt werden. Dazu werden die Rohstoffe Baumwolle (B), Elasthan (E) und Polyamid (P) verwendet. Aus diesen Rohstoffen werden zunächst zwei Stoffe, Jersey und Stretch, gefertigt, die dann dann anschließend zu Sporthosen (SH) und Funktions-shirts (FS) verarbeitet werden.

Die Herstellung der Zwischenprodukte aus Rohstoffen erfolgt nach folgender Bedarfsmatrix (Rohstoffbedarf in kg pro Meter Stoff):

	Jersey	Stretch
Baumwolle	2	0,3
Elasthan	0,5	0,2
Polyamid	0	1

Für die Produktion einer Sporthose werden 1,5 Meter Jersey und 0,5 Meter Stretch, sowie zusätzlich 0,1 kg Polyamid benötigt. Ein Funktionsshirt benötigt 1 Meter Jersey und 0,3 Meter Stretch.

- Berechnen Sie die Gesamtbedarfsmatrix, die den Bedarf an Rohstoffen pro Endprodukt (Sporthose, Funktionsshirt) angibt, mithilfe von Matrizenmultiplikation und Addition.
- Ein Kunde bestellt 100 Sporthosen und 200 Funktions-shirts. Bestimmen Sie mithilfe der Gesamtbedarfsmatrix den Bedarf an Baumwolle, Elasthan und Polyamid für diesen Auftrag.
- Die Preise in € für die Rohstoffe betragen (pro Kilogramm):

Baumwolle	Elasthan	Polyamid
3	10	5

Berechnen Sie – unter der Annahme, dass keine Fixkosten anfallen – die Kosten des Auftrags aus b).

- In einer Woche werden 1000 Sporthosen und 2000 Funktions-shirts hergestellt. Wie viele Meter Jersey und wie viel Meter Stretch werden dafür benötigt?
- Wenn noch 600 Meter Jersey, 190 Meter Stretch und 400 kg Polyamid auf Lager sind, wie viele Sporthosen und wie viele Funktions-shirts können dann noch hergestellt werden, wenn der gesamte Stoffvorrat zur Gänze aufgebraucht werden soll?

9. **P 5** Ein Elektronikunternehmen verwendet die drei Komponenten K_1, K_2, K_3 , um zunächst die beiden Module M_1, M_2 herzustellen, die anschließend zu den Endprodukten P_1, P_2 zusammengebaut werden. Die jeweiligen Bedarfe sind in folgenden Tabellen angegeben:

	Module	
Komponenten	M_1	M_2
K_1	3	1
K_2	2	4
K_3	1	2

	Module	
Endprodukte	M_1	M_2
P_1	2	4
P_2	1	3

- a) Stellen Sie die Gesamtbedarfsmatrix der Komponenten K_1, K_2, K_3 für jeweils eine Einheit der Endprodukte P_1, P_2 durch Matrizenmultiplikation auf. Was bedeuten die Einträge dieser Matrix?
- b) Ein Kunde bestellt 15 Einheiten von P_1 und 30 Einheiten von P_2 . Wie hoch ist der Bedarf an Komponenten K_1, K_2, K_3 für diesen Auftrag?
- c) Die Preise pro Einheit der Komponenten sind: K_1 : 12 €, K_2 : 9 €, K_3 : 6 €. Jeder Auftrag verursacht zusätzlich Fixkosten in Höhe von 1.500 €. Berechnen Sie die Gesamtkosten des Auftrags aus b).
10. Bestimmen Sie alle Lösungen der folgenden linearen Gleichungssysteme:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{6}z = \frac{1}{6} \\ & x + 2y - z = 4 \\ & -3x - 5y = -5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad & 2x_1 - 4x_2 = 4 \\ & 5x_1 - 10x_2 = -8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad & x + y + z - w = 1 \\ & -2x - y - 2z + w = -2 \\ & -x - y - z + w = -1 \end{aligned}$$

11. **P6** Die Summe dreier Kapitalien beträgt € 2.400.-. Das erste ist zu 3 % p. a., das zweite zu 4 % p. a. und das dritte zu 5 % p. a. angelegt. Die ersten beiden tragen gleich hohe Zinsen. Würden sich die Zinsen des ersten Kapitals auf 4 %, die des zweiten auf 5 % verändern und blieben die Zinsen für das dritte Kapital gleich, so wäre die Summe der Zinsen aus den ersten beiden um 12 € größer als die Zinsen aus dem dritten Kapital.
- a) Stellen Sie aus diesen Angaben ein Gleichungssystem zur Bestimmung der drei Kapitalien auf. Geben Sie dabei die Bedeutung der von Ihnen verwendeten Variablen explizit an.
- b) Bestimmen Sie die Lösung dieses Gleichungssystems unter Verwendung des Gauß-Algorithmus.

12. P 7

a) Berechnen Sie jeweils die Determinante der folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

b) Berechnen Sie die Determinante der folgenden Matrix auf zwei Arten. Welche Besonderheit können Sie sich dabei zunutze machen?

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

13. Gegeben sind die Vektoren $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $c = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie den Vektor $d = a + 2 \cdot b$ (d heißt „Linearkombination“ von a und b), skizzieren Sie ihn in einem geeigneten Koordinatensystem und berechnen Sie seinen Betrag (Länge).

b) Stellen Sie den Vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ als Linearkombination von a und b dar.

c) Was erhalten Sie, wenn Sie versuchen den Vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ als Linearkombination von b und c darzustellen?

14. Sind die folgenden Vektoren linear unabhängig?

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

15. P 8 Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ t & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

a) Für welche Werte von $t \in \mathbb{R}$ ist die Matrix A invertierbar?

b) Bestimmen Sie den Rang der Matrix A für einen Wert von t , für den A nicht invertierbar ist.

16. Gegeben sind die Matrix A und der Vektor b :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & \mu \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ \lambda \\ -6 \end{pmatrix} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

- a) Für welche Werte von $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ besitzt $Ax = b$ eine eindeutige Lösung?
- b) Für welche Werte von $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ besitzt $Ax = b$ keine Lösung?

17. P 9 Betrachten Sie das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x + y - z &= 2 \\ x - y + 3z &= 4 \\ x + y + (a-1)z &= a \end{aligned}$$

mit dem Parameter $a \in \mathbb{R}$.

- a) Bestimmen Sie alle Werte von a , für die das System keine Lösung besitzt.
- b) Bestimmen Sie alle Werte von a , für die das System genau eine Lösung besitzt. Geben Sie für mindestens einen dieser Werte a die zugehörige Lösung an.
- c) Gibt es Werte von a , für die das System unendlich viele Lösungen hat? Begründen Sie Ihre Antwort.

18. Gegeben sind die Matrix A und der Vektor b :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -t^2 \\ -1 & 16 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ t \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad t \in \mathbb{R}$$

- a) Für welche Werte von $t \in \mathbb{R}$ besitzt $Ax = 0$ nur die triviale Lösung?
- b) Für welche Werte von $t \in \mathbb{R}$ ist $Ax = b$ lösbar?

19. Gegeben ist die Matrix A und der Vektor b :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -5 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- a) Berechnen Sie die Inverse der Matrix A und führen Sie eine Probe durch!
- b) Bestimmen Sie nun mit Hilfe der Inversen die eindeutige Lösung des Gleichungssystems $A \cdot x = b$.

Die mit P gekennzeichneten Beispiele sind von den Studierenden vorzubereiten und nach Aufruf durch die Lehrveranstaltungsleitung zu präsentieren!