Wirtschaftsmathematik – Übungen SS 2026

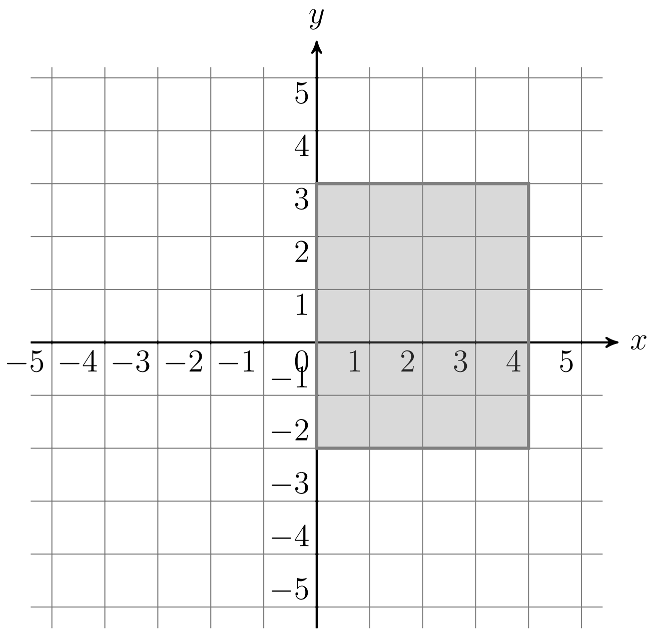
Blatt 5: Funktionen von mehreren reellen Variablen

1. Skizzieren Sie in einem geeigneten Koordinatensystem die Isoquanten I_c der folgenden Funktionen zu den jeweils vorgegebenen Niveaus:

   a)
   $$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ mit } f(x, y) = 3x + 4y$$
   zu den Niveaus $c = 12$ und $c = 0$.

   b)
   $$f : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R} \text{ mit } f(x, y) = y - x^2 + 4$$
   zu den Niveaus $c = 0$ und $c = 4$.

2. $\boxed{\text{P 41}}$ Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = e^{-\left(x^2+y^2\right)}$. Der Definitionsbereich dieser Funktion ist in nachfolgender Abbildung grau unterlegt dargestellt:



   a) Geben Sie den Definitionsbereich der Funktion in beschreibender Form an.

   b) Skizzieren Sie die Isoquanten dieser Funktionen zu den Werten $c = e^{-4}$ und $c = e^{-1}$ in der obigen Grafik.

3. Gegeben ist eine Funktion in zwei Variablen

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ mit } f(x,\, y) = x^2 + 5xy + y^2 + 7$$

   a) Bestimmen Sie die ersten partiellen Ableitungen allgemein und an der Stelle $(x, y) = (1, 2)$

   b) Bestimmen Sie den Gradienten von f an der Stelle $(1, 2)$. Interpretieren Sie Ihr Resultat.

4. Gegeben ist eine Funktion in zwei Variablen

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ mit } f(x,\, y) = \frac{x^2}{y} + 5y + 1$$

   a) Berechnen Sie die normierte Richtungsableitung der Funktion f an der Stelle $(3, 1)$ in Richtung des Vektors $\overrightarrow{z} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

   b) Wie ändert sich der Funktionswert näherungsweise, wenn man, ausgehend von der Stelle $(3, 1)$, x um $dx = 0,2$ und y um $dy = -0,1$ Einheiten verändert?

5. $\boxed{\text{P 42}}$ Gegeben ist die Funktion

$$f(x, y) = e^{2x^2 - 3y}.$$

   a) Bestimmen Sie an der Stelle $(1, 0)$ die normierte Richtungsableitung in Richtung des Vektors $z = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

   b) Bestimmen Sie die Richtung, in der f an der Stelle $(1, 0)$ am stärksten abnimmt. Geben Sie einen möglichen Richtungsvektor an.

6. $\boxed{\text{P 43}}$ Gegeben ist eine Funktion in zwei Variablen

$$f(x, y) = \frac{3y}{x^2} + \left(x + 2\right) \cdot \ln(y)$$

   wobei $x > 0$ und $y > 0$ gelten soll.

   Wie ändert sich der Funktionswert näherungsweise, wenn man sich vom Punkt $(2; 1)$ in den Punkt $(2{,}2; 1{,}1)$ bewegt?

7. Gegeben ist die Funktion $f(x, y) = x^2 \cdot (y + 1) + \frac{1}{2}y^2$.

   a) Untersuchen Sie f auf stationäre Stellen.

   b) Wie lautet die Hesse-Matrix.

   c) Klassifizieren Sie nun die unter a) ermittelten stationären Stellen.

8. $\boxed{\text{P 44}}$ Gegeben ist die Funktion in zwei Variablen

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = (y^2 - 1)(2 - x - y).$$

a) Ermitteln Sie die stationären Stellen von f.

b) Bestimmen Sie die Hesse-Matrix.

c) Klassifizieren Sie nun die unter a) ermittelten stationären Stellen.

d) Handelt es sich bei der Stelle $(x, y) = (2, 1)$ um

i. ein Maximum

ii. ein Minimum

iii. eine Sattelstelle

iv. keine der genannten Möglichkeiten?

Begründen Sie.

9. Die Nachfrage nach einem Gut hängt nicht nur vom Preis p_1 dieses Gutes, sondern auch vom Preis p_2 eines zweiten Gutes ab:

$$N^1(p_1, p_2) = e^{p_2 - p_1^2}$$

a) Um wie viel Prozent ändert sich die Nachfrage näherungsweise, wenn man – ausgehend von $(p_1, p_2) = (1, 3)$ – den Preis p_1 um ein Prozent erhöht?

b) Um wie viel Prozent ändert sich die Nachfrage näherungsweise, wenn man – ausgehend von $(p_1, p_2) = (1, 3)$ – den Preis p_2 um ein Prozent erhöht?

10. Ein Monopolist stellt zwei Güter her. Die Abhängigkeit der Preise (p_1 und p_2) je Mengeneinheit von den Absatzmengen ($x_1 \ldots$ Menge Gut 1 und $x_2 \ldots$ Menge Gut 2) stellt sich folgendermaßen dar:

$$p_1(x_1, x_2) = 20 - x_1 - 2x_2$$

$$p_2(x_1, x_2) = 28 - x_1 - 3x_2$$

a) Bestimmen Sie die Gesamtgewinnfunktion, wenn die Produktionskosten durch $K(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1 \cdot x_2 + x_2^2$ gegeben sind.

b) Bei welchen Absatzmengen x_1 und x_2 wird der Gewinn maximal? Nehmen Sie dabei an, dass die gesamte Produktionsmenge abgesetzt wird. Prüfen Sie sowohl die notwendige als auch die hinreichende Bedingung.

c) Wie hoch ist der maximale Gewinn?

11. Die Faktoreinsatzmengen Arbeit, Kapital und Energie für die Cobb-Douglas-Produktionsfunktion

$$f(A, K, E) = 3 \cdot \sqrt{A \cdot K^3 \cdot E^2}$$

betragen $A = 9$, $K = 1$, $E = 4$.

a) Geben Sie einen ökonomisch sinnvollen Definitionsbereich an.

b) Bestimmen Sie den Homogenitätsgrad.

c) Wie viele Einheiten von A muss man näherungsweise zusätzlich einsetzen, um eine Einheit von K zu ersetzen, wenn das Produktionsniveau dabei unverändert bleiben soll?

d) Um wie viel Prozent ändert sich das Produktionsniveau – ausgehend von den aktuellen Faktoreinsatzmengen – näherungsweise, wenn der Faktor A um 2 % erhöht wird und die anderen Faktoren unverändert bleiben?

e) Um wie viele Einheiten ändert sich das Produktionsniveau – ausgehend von den aktuellen Faktoreinsatzmengen – näherungsweise, wenn der Faktor E um eine Einheit erhöht wird und die anderen Faktoren unverändert bleiben?

12. Gegeben ist die Nutzenfunktion: $U(x, y) = \dfrac{x^2 \cdot y^2}{x^2 + y^2}$.

a) Ist diese Funktion homogen?

b) Wie ändert sich der Nutzen näherungsweise, wenn man, ausgehend von der Stelle $(2, 2)$, x um $dx = 0,1$ und y um $dy = 0,2$ Einheiten verändert?

Die mit $\boxed{\text{P}}$ gekennzeichneten Beispiele sind von den Studierenden vorzubereiten und nach Aufruf durch die Lehrveranstaltungsleitung zu präsentieren!