

Wirtschaftsmathematik – Übungen SS 2026

Blatt 4: Funktionen von einer Variablen

1. Gegeben sind die Mengen

$$A = \{2, 3\} \quad \text{und} \quad B = \{2, 4, 6\}$$

sowie die Zuordnungsvorschrift $f : A \rightarrow B$, $y = f(x)$ mit

$$y \in B \text{ ist das Doppelte von } x \in A$$

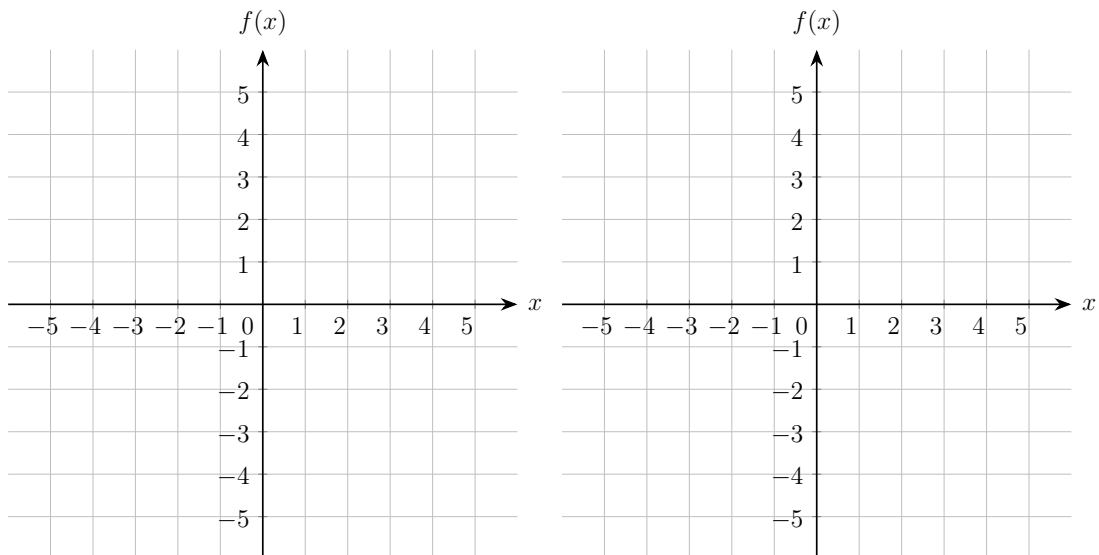
- Skizzieren Sie diese Zuordnungsvorschrift in einem Pfeildiagramm und begründen Sie, warum durch die Vorschrift f eine Funktion definiert ist!
- Bestimmen Sie die Bildmenge der Funktion.
- Ist die Funktion f injektiv, surjektiv, bijektiv? Existiert eine Inverse zu f ? Begründen Sie!

2. P 29

- Eine lineare Funktion $f : [-3; 5] \rightarrow \mathbb{R}$ erfüllt folgende Eigenschaften:
 - Die Steigung beträgt -1 .
 - Es gilt $f(-2) = 3$.

Zeichnen Sie den Graphen von f in das linke nachstehende Koordinatensystem ein und geben Sie das Bild der Funktion f an.

- Eine Polynomfunktion vierten Grades kann bis zu drei Extremstellen besitzen.
 - Skizzieren Sie in das rechte nachstehende Koordinatensystem eine Polynomfunktion vierten Grades g mit Definitionsbereich $D = \mathbb{R}$, die genau *drei* Extremstellen besitzt und für $x \rightarrow \pm\infty$ gegen $+\infty$ strebt.
 - Geben Sie eine möglichst große Teilmenge des Definitionsbereichs $D = \mathbb{R}$ von g an, auf der g streng monoton ist, und begründen Sie Ihre Wahl anhand Ihrer Skizze.
 - Bestimmen Sie, ob $g : [-3; 5] \rightarrow \text{Im}(g)$ in Ihrer Zeichnung bijektiv ist. Begründen Sie Ihre Antwort.



3. Für welche reellen Zahlen x ist die folgende Funktion $f(x)$ definiert?

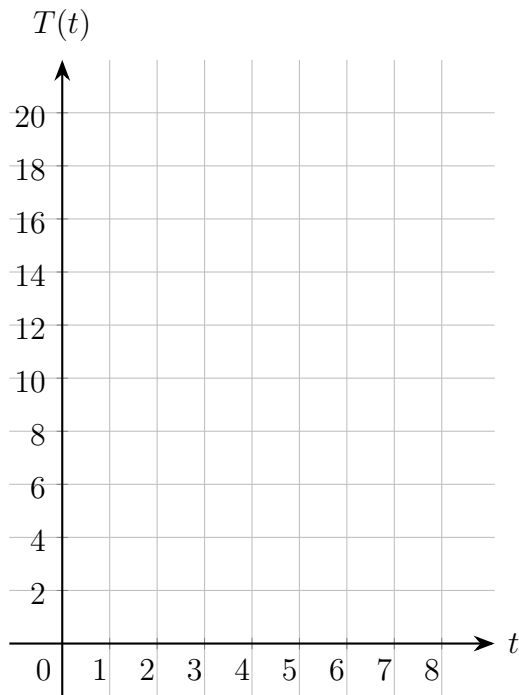
$$f(x) = \frac{\sqrt{-x^2 + 4}}{x - 1}$$

4. P 30 Zwei lineare Funktionen beschreiben die Temperaturentwicklung an zwei verschiedenen Tagen (in °C) in Abhängigkeit von der Zeit t in Stunden:

$$T_1(t) = k_1 \cdot t + 8, \quad T_2(t) = k_2 \cdot t + 20.$$

Für den ersten Tag gilt $k_1 > 0$, für den zweiten Tag $k_2 < 0$. Außerdem geht T_1 durch den Punkt $(2, 10)$.

- a) Bestimmen Sie die Steigung der Funktion T_1 .
- b) Zeichnen Sie den Graphen von T_1 und eine mögliche Lösung für den Graphen von T_2 in das folgende Koordinatensystem ein.



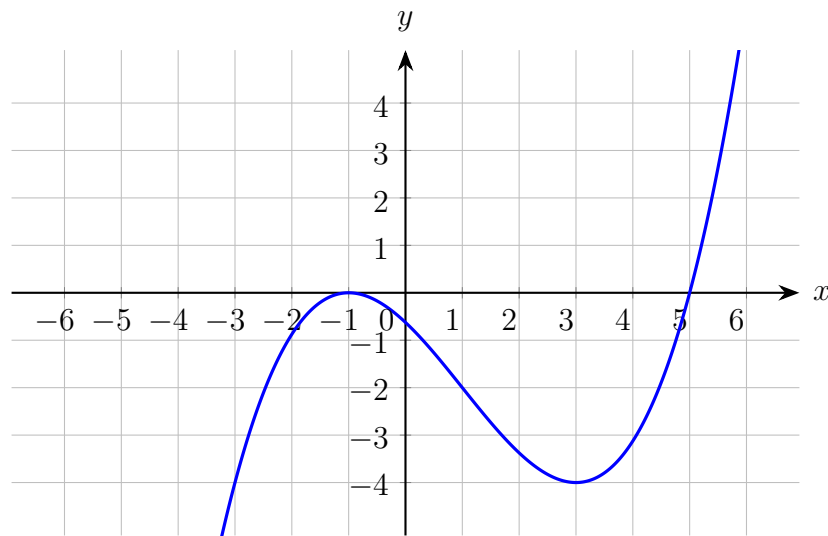
- c) Zu welcher Uhrzeit ist für Ihre Lösung die Temperatur an beiden Tagen gleich?
($t = 0 \hat{=} 0:00$ Uhr).
- d) Berechnen Sie für jeden Tag die Zeitpunkte, zu denen die Temperatur $T = 12^\circ\text{C}$ beträgt (falls vorhanden).

5. Gegeben ist die Funktion $f : [2; 5[\rightarrow [2; 4[$, $x \mapsto f(x)$ mit

$$f(x) = 2 \cdot \sqrt{x - 1}$$

- a) Skizzieren Sie diese Funktion in einem Koordinatensystem.
- b) Ist die Funktion f bijektiv? Existiert eine Inverse zu f ? Bestimmen Sie, wenn möglich, die Umkehrfunktion.

6. Die nachfolgende Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion. Skizzieren Sie die ersten beiden Ableitungen dieser Funktion!



7. Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = (x + 4) \cdot e^{-\frac{x}{4}}$$

Diskutieren Sie diese Funktion, d.h. bestimmen Sie die größtmögliche Definitionsmenge, Nullstellen, Extremstellen, Wendepunkte, Monotonie, das Krümmungsverhalten und das Verhalten im Unendlichen. Skizzieren Sie den Graphen!

8. P 31 Gegeben sind die Funktionen:

$$g: D \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = \ln(x + 1)$$

$$h: D \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(x) = \sqrt{2x + 3}$$

- Bestimmen Sie die verkettete Funktion $f(x) = (g \circ h)(x) = g(h(x))$. Für welche reellen Zahlen x ist die Funktion $f(x)$ definiert?
- Berechnen Sie die erste Ableitung $f'(x)$. Geben Sie an, welche Ableitungsregeln Sie verwendet haben.
- Untersuchen Sie, ob die Funktion f auf ihrem Definitionsbereich streng monoton steigend ist.

9. P 32 Gegeben ist die Funktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$$

Bestimmen Sie die größtmögliche Teilmenge der Definitionsmenge, auf der die Funktion monoton wachsend ist.

10. **P 33** Gegeben ist die Funktion

$$f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 1}$$

Berechnen Sie die erste Ableitung $f'(x)$ und untersuchen Sie, für welche x die Funktion streng monoton steigend ist.

11. Bestimmen Sie die Grenzwerte:

$$a) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{x^2 - 4} \quad b) \lim_{x \rightarrow \infty} (x + 4) \cdot e^{-\frac{x}{4}}$$

12. **P 34** Bestimmen Sie den Grenzwert:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 8x}{x^3 - 3x^2 + 4}$$

13. Gegeben ist die Funktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad f(x) = x^2 - 5x + 6$$

- a) Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion f .
b) In welchem Punkt des Graphen der Funktion f ist die Tangente parallel zur Geraden $3x + y - 1 = 0$?

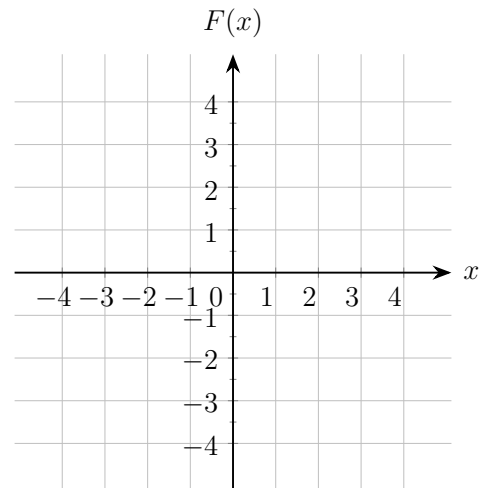
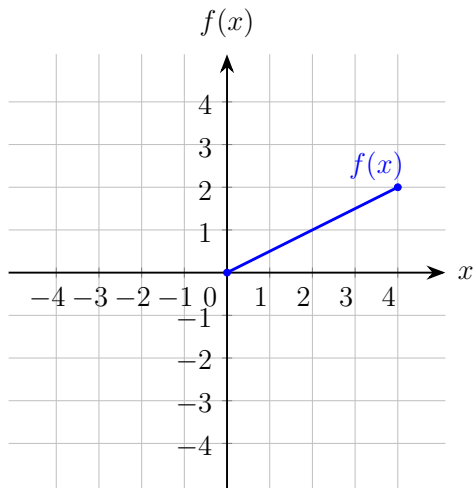
14. Berechnen Sie sämtliche Stammfunktionen für:

$$a) f(x) = 9x^2 + 5x - x^{\frac{1}{2}} \quad b) f(x) = \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}}$$

Verifizieren Sie Ihre Lösung.

15. **P 35** In der linken nachstehenden Abbildung ist der Graph einer reellen Funktion $f : [0; 4] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$ dargestellt. Die Funktion F mit $F(0) = 0$ ist eine Stammfunktion von f . Die gekennzeichneten Punkte haben ganzzahlige Koordinaten.

- a) Bestimmen Sie die Gleichung der Stammfunktion F und zeichnen Sie ihren Graphen in das rechte nachstehende Koordinatensystem ein.
 b) Bestimmen Sie $F(4)$ und interpretieren Sie den erhaltenen Wert.



16. Bestimmen Sie:

a) $\int \sqrt{\frac{1}{2}x + 1} dx$

b) $\int 4x \cdot \ln(x^2 + 8) dx$

17. **P 36** Berechnen Sie

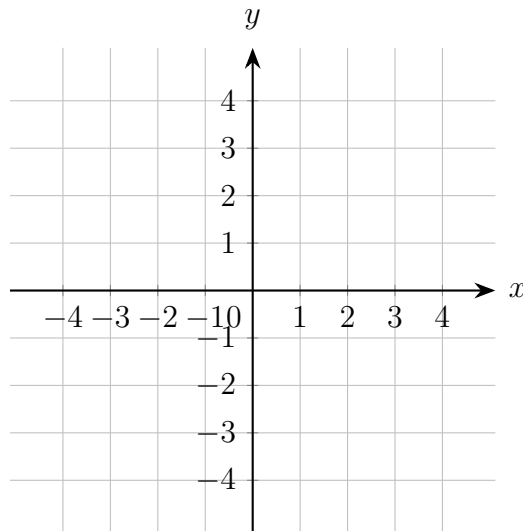
$$\int_1^2 x \cdot e^{x^2-2} dx$$

18. Berechnen Sie den Wert des folgenden bestimmten Integrals. Entspricht der erhaltene Wert der Fläche zwischen dem Graphen der Funktion und der x -Achse? Begründen Sie!

$$\int_0^4 \left(\frac{1}{2}x^2 - 2 \right) dx$$

19. **P 37** Gegeben ist die Funktion $f(x) = -x + 1$.

- Skizzieren Sie den Graphen von $f(x)$ in nachstehendes Koordinatensystem.
- Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die die Funktion f mit der x -Achse im Intervall $[-1; 3]$ einschließt mit Hilfe von Dreiecksflächen.
- Bestimmen Sie das Integral $\int_{-1}^3 f(x) dx$ und vergleichen Sie diesen Wert mit der in
b) bestimmten Fläche.



20. Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, mit:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - 1 & x \leq 2 \\ -x^2 + 5 & x > 2 \end{cases}$$

- Skizzieren Sie die Funktion in einem geeigneten Koordinatensystem und überprüfen Sie graphisch, ob f über ganz \mathbb{R} stetig ist!
- Existiert die Ableitung $f'(x)$ an der Stelle $x = 2$? Begründen Sie! Wenn möglich, bestimmen Sie $f'(2)$.
- Wie groß ist die Fläche, die die Funktion f und die Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, mit $g(x) = 1$ im Intervall $[0; 2]$ einschließen?

21. In einem fiktiven Land gelten die folgende Steuersätze in Abhängigkeit vom jährlichen Bruttoeinkommen x :

Jahreseinkommen	Grenzsteuersatz in Prozent
bis € 30.000 (einschließlich)	10
von € 30.000 bis € 60.000 (einschließlich)	30
über € 60.000	p

- a) Nehmen Sie an, der Grenzsteuersatz p in der dritten Stufe beträgt 40 Prozent. Wie hoch ist dann das Nettoeinkommen, falls jemand 70.000 Euro brutto verdient?
- b) Erstellen Sie eine stückweise lineare Funktion $T(x)$, die die Höhe der abzuführenden Steuer in Abhängigkeit von der Höhe des Einkommens beschreibt und skizzieren Sie deren Graphen, wenn der Grenzsteuersatz p in der dritten Stufe 40 Prozent beträgt. Bestimmen Sie das notwendige Bruttoeinkommen x , wenn die zu bezahlenden Steuern $T(x) = 9.000$ Euro betragen.
- c) Wie hoch müsste der Grenzsteuersatz p in der höchsten Steuerstufe sein, damit bei einem Bruttoeinkommen von $x = 240.000$ Euro die Gesamtsteuerlast 50% beträgt?
22. Die Fixkosten eines Unternehmens (während einer bestimmten Periode) betragen 7 Geldeinheiten (GE). Die Grenzkosten bei einer Produktion von 3 Mengeneinheiten (ME) betragen 10 GE. Die Stückkosten für eine Produktion von 2 ME betragen $\frac{19}{2}$ GE. Der Marktpreis, zu dem verkauft werden kann, ist $p = 12$ GE/ME.
- a) Ermitteln Sie die Kostenfunktion, wenn für den Kostenverlauf ein Polynom 2. Grades angenommen werden kann?
- b) Ermitteln Sie die Gewinnfunktion.
- c) Für welche Produktionsmengen arbeitet das Unternehmen mit einem Verlust?
- d) Für welche Produktionsmenge wird der Gewinn maximal? Ermitteln Sie den maximalen Gewinn.

23. P 38

a) Die Gesamtkosten für die Produktion von x Einheiten eines Gutes sind

$$K(x) = 2x^2 + x + 8, \quad x \geq 0,$$

Zeigen Sie, dass die Durchschnittskosten

$$D(x) = \frac{K(x)}{x}$$

ein Minimum besitzen und bestimmen Sie die Stelle dieses Minimums. Zeigen Sie, dass es sich tatsächlich um ein Minimum handelt.

b) Verwenden Sie die Preis-Absatz-Funktion $p(x) = -x + 25$.

Wenn das Unternehmen $x = 4$ Einheiten verkaufen möchte, welchen Preis kann es höchstens verlangen? Wie groß ist dann der Gewinn?

24. Die Grenzkostenfunktion eines Betriebes kann annähernd durch die quadratische Funktion

$$K'(x) = \frac{1}{2} \cdot (x - 6)^2$$

dargestellt werden. Bei Stillstand der Produktion betragen die Gesamtkosten 6 GE. Die Preis-Absatz-Funktion des Betriebes lässt sich durch

$$p(x) = -\frac{3}{2}x + 18$$

beschreiben.

a) Skizzieren Sie die Preis-Absatz-Funktion und bestimmen Sie Höchstpreis und Sättigungsmenge.

b) Bestimmen Sie die Kostenfunktion $K(x)$, sowie die Erlösfunktion $E(x)$.

c) Ermitteln Sie den maximalen Gewinn.

d) In welchem Bereich arbeitet der Betrieb mit progressiven Kosten?

25. P 39 Die Preis-Absatz-Funktion eines Unternehmens ist gegeben durch

$$p(x) = \frac{80}{2x + 5}$$

a) Bestimmen Sie die Grenznachfragefunktion $x'(p)$ und geben Sie deren Wert an der Stelle $p = 4$ an. Interpretieren Sie den erhaltenen Wert ökonomisch.

b) Bestimmen Sie die Preiselastizität der Nachfrage an der Stelle $p = 4$ und interpretieren Sie diese.

26. Eine Nachfragefunktion ist gegeben durch: $N : D \rightarrow \mathbb{R}$, $p \mapsto N(p)$ mit

$$N(p) = \begin{cases} 20 - \frac{p^2}{25} & \text{für } p \leq 15 \\ -p + 26 & \text{für } p > 15 \end{cases}$$

- a) Geben Sie einen ökonomisch sinnvollen Definitionsbereich dieser Nachfragefunktion an und skizzieren Sie den Funktionsgraphen in einem geeigneten Koordinatensystem.
- b) Überprüfen Sie graphisch, ob N an der Stelle $p = 15$ stetig ist!
- c) Bestimmen Sie zum Preis $p = 10$ die Preiselastizität der Nachfrage und interpretieren Sie den erhaltenen Wert.

27. P 40 Gegeben ist eine Nachfragefunktion $n : D \rightarrow \mathbb{R}$, $p \mapsto n(p)$ mit

$$n(p) = 50 \cdot e^{-\frac{p^2}{5}}.$$

Um wie viel Prozent ändert sich die Nachfrage näherungsweise, wenn p ausgehend von $p = 3$ Euro um 1% erhöht wird?

Die mit P gekennzeichneten Beispiele sind von den Studierenden vorzubereiten und nach Aufruf durch die Lehrveranstaltungsleitung zu präsentieren!