Wirtschaftsmathematik - Übungen SS 2026

Blatt 1: Lineare Algebra

1. Gegeben ist eine 3×3 Matrix $A = (a_{ij})$ mit

$$a_{ij} = \begin{cases} 2^{j-i} & \text{für} \quad i < j \\ (-1)^i \cdot j & \text{für} \quad i = j \\ i - j & \text{für} \quad i > j \end{cases}$$

eine Matrix $B^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, ein Zeilenvektor $u^T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ sowie ein Spaltenvektor $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   a) Schreiben Sie die Matrix A an.
   b) Berechnen Sie $u^T \cdot v$.
   c) Berechnen Sie – wenn möglich: $A \cdot B$ und $B \cdot A$.

2. $\boxed{\text{P 1}}$ Eine kleine Bäckerei produziert drei Sorten Gebäck: Croissant (C), Vollkornbrötchen (V) und Laugenstangen (L). Für eine interne Analyse werden die täglichen Produktionsmengen der letzten zwei Tage in der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 40 & 60 \\ 30 & 45 \\ 20 & 25 \end{pmatrix}$$

erfasst, wobei die Spalten die Tage (Tag 1, Tag 2) und die Zeilen die Sorten (C, V, L) darstellen.

Außerdem wird die Nachfrageentwicklung für die nächste Woche durch eine 3×3 Matrix $B = (b_{ij})$ modelliert mit

$$b_{ij} = \begin{cases} 2 & \text{falls } i = j \\ -1 & \text{falls } i < j \\ 0 & \text{falls } i > j \end{cases}$$

Weiters ist gegeben $x^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ die Zeile der Verkaufspreise (in Euro) pro Stück für (C, V, L) und $y = \begin{pmatrix} 50 \\ 70 \\ 40 \end{pmatrix}$ der Vektor aktueller Bestellungen.

a) Bestimmen Sie die Matrix B.

b) Interpretieren Sie $A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ im Kontext und berechnen Sie diesen Vektor.

c) Berechnen Sie – wenn möglich:

   i. $A + B, \quad A \cdot B.$

   ii. $x^T \cdot y.$

   Kommentieren Sie jeweils kurz, was die Ergebnisse im Kontext bedeuten.

3. $\boxed{\text{P 2}}$ Zeigen Sie für eine allgemeine 2×2- Matrix A, dass die Matrix $A \cdot A^T$ existiert und symmetrisch ist.

a) Führen Sie den Nachweis durch direktes Ausrechnen.

b) Geben Sie ein konkretes Beispiel einer 2×2 Matrix A an, für die $A \cdot A^T$ *nicht* die Einheitsmatrix ist, obwohl $A \cdot A^T$ symmetrisch ist.

4. Gegeben sind die regulären (invertierbaren) $n \times n$-Matrizen A, B, C und X. Lösen Sie die folgenden Matrizengleichungen nach der Matrix X auf. Welche Voraussetzungen müssen dabei erfüllt sein?

a) $(A + B) \cdot X = \left(X^T \cdot B^T\right)^T + C$

b) $A - X \cdot A + C = X \cdot B$

5. $\boxed{\text{P 3}}$ A, B, C und X sind reguläre (invertierbare) $n \times n$-Matrizen. Bestimmen Sie die Lösungsmatrix X der folgenden Matrizengleichung:

$$3AX - 2BX + 4C = 5 \cdot (A + C) - A$$

Erklären Sie, warum jeweils die Invertierbarkeit bestimmter Matrizen notwendig ist und welche Konsequenz es hätte, wenn diese nicht invertierbar wären.

6. Eine Autovermietung auf einer Ferieninsel hat drei Standorte, einen am Flughafen (F), einen im Zentrum der Hauptstadt (Z) und einen am Hafen (H). Kunden können PKW für einen Tag an einer der drei Niederlassungen mieten und an einer beliebigen anderen ohne Aufpreis zurückgeben. Eine Analyse zeigt folgendes Wechselverhalten:
   - nach Niederlassung F kehren 60 % der ausgeliehenen Fahrzeuge zurück; je 20 % wechseln nach Z bzw. H.
   - 70 % der Fahrzeuge, die am Morgen in Niederlassung Z stehen, stehen am nächsten Morgen wieder in Z, 10 % sind von Z nach F, der Rest nach H gewechselt.
   - von Niederlassung H aus wechseln erfahrungsgemäß 20 % nach Niederlassung F, 40 % nach Z und 40 % kehren wieder zurück nach H.

   a) Stellen Sie die Übergangsmatrix U für den Übergang zum nächsten Tag auf!

   b) Die Autovermietung besitzt 225 PKW, die sich im Verhältnis 3 : 4 : 2 auf die Standorte F, Z und H aufteilen. Bestimmen Sie die Anzahl der Fahrzeuge an den drei Standorten am Morgen des nächsten Tages.

   c) Ermitteln Sie die Anzahl der Fahrzeuge an den drei Standorten am Morgen des Vortages, wenn man annimmt, dass die Übergangsmatrix aus a) auch für die Vorperiode gegolten hat und die Inverse der Matrix U

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

   lautet.

7. $\boxed{\text{P 4}}$ In einem Finanzmarkt investieren Anleger in Wertpapiere, Gold und Immobilien. Jährlich schichten sie Teile ihres Vermögens zwischen diesen Anlageklassen um. Dabei werden nur Umschichtungen betrachtet; Kursänderungen, Erträge sowie Zu- und Abflüsse von Kapital bleiben unberücksichtigt. Das Gesamtvermögen bleibt konstant. Für das Jahr 2026 wird erwartet, dass die Umschichtungen gemäß den folgenden Prozentsätzen vorgenommen werden:

- Wertpapiere: 10 % werden in Gold, 10 % in Immobilien umgeschichtet.
- Gold: 10 % werden in Wertpapiere, 20 % in Immobilien umgeschichtet.
- Immobilien: 10 % werden in Wertpapiere, 10 % in Gold umgeschichtet.

Nicht umgeschichtete Anteile verbleiben in der jeweiligen Anlageklasse. Zu Beginn des Jahres 2026 beträgt die Vermögensverteilung (in Prozent):

$$\text{Wertpapiere: } 60\,, \quad \text{Gold: } 25, \quad \text{Immobilien: } 15$$

a) Stellen Sie die Übergangsmatrix U für das Jahr 2026 auf und erläutern Sie exemplarisch die Bedeutung der Einträge der dritten Spalte.

b) Berechnen Sie die Vermögensverteilung am Ende des Jahres 2026.

c) Berechnen Sie den Eintrag u_{11} der Matrix U^2 und erläutern Sie dessen Bedeutung. Nehmen Sie dabei an, dass die Umschichtungen auch im Folgejahr 2027 gemäß den oben angegebenen Prozentsätzen erfolgen.

8. In einem Papier- und Zellstoffwerk werden zwei Produkte hergestellt: Druckpapier und Karton. Die Herstellung erfolgt in zwei Stufen. In der ersten Stufe werden die Rohstoffe Holz (H) in m^3, Wasser (W) in m^3 und Chemikalien (C) in t benötigt, um Holzschliff (HS) in t und Zellstoff (ZS) in t als Zwischenprodukte zu erzeugen. In der zweiten Stufe werden aus den Zwischenprodukten sowie weiterem Wasser das Druckpapier (D) in t und der Karton (K) in t hergestellt.

   Der Aufwand (in Mengeneinheiten) für die Produktion je einer Mengeneinheit der Zwischen- bzw. Endprodukte ist aus folgenden Tabellen ersichtlich:

	Zwischenprodukte	
Rohstoffe	HS	ZS
H	2	3
W	5	10
C	1	5

	Endprodukte	
Zwischenprodukte/Rohstoffe	D	K
HS	1	2
ZS	4	1
W	3	2

   a) Geben Sie den Gesamtbedarf der Rohstoffe H, W und C für jeweils eine Tonne Druckpapier bzw. eine Tonne Karton in Form einer Matrix an.

   b) Ein Kunde bestellt 40 Tonnen Druckpapier und 20 Tonnen Karton. Bestimmen Sie mithilfe der Gesamtbedarfsmatrix den Bedarf an Holz, Wasser und Chemikalien für diesen Auftrag.

   c) Die Preise für die Rohstoffe betragen pro Mengeneinheit: € 50.-/m^3 für Holz, € 1.-/m^3 für Wasser, und € 100.-/Tonne für Chemikalien.

      Berechnen Sie – unter der Annahme, dass jeder Auftrag mit Fixkosten von € 2.000 verbunden ist – die Kosten des Auftrags aus b).

   d) In einer Woche werden 5.000 Tonnen Druckpapier und 2.000 Tonnen Karton hergestellt. Wie viele Tonnen Holzschliff und wie viele Tonnen Zellstoff werden dafür benötigt?

   e) Wenn noch 2.000 Tonnen Holzschliff, 4.500 Tonnen Zellstoff und 5.000 m^3 Wasser auf Lager sind, wie viele Tonnen Druckpapier und wie viele Tonnen Karton können dann noch hergestellt werden, wenn der gesamte Vorrat an Zwischenprodukten zur Gänze aufgebraucht werden soll?

9. $\boxed{\text{P 5}}$ Ein Technologieunternehmen stellt aus den Komponenten K_1 bis K_3 zunächst die Zwischenmodule Z_1 und Z_2 her, die dann zu den Endprodukten E_1 und E_2 weiterverarbeitet werden. Der Produktionsprozess lässt sich durch die folgenden Tabellen beschreiben:

	Zwischenmodul	
Komponenten	Z_1	Z_2
K_1	2	1
K_2	1	3
K_3	0	4

	Zwischenmodul	
Endprodukt	Z_1	Z_2
E_1	1	2
E_2	3	1

a) Bestimmen Sie die Gesamtbedarfsmatrix, die angibt, wie viele Einheiten der Komponenten K_1 bis K_3 für jeweils eine Einheit der Endprodukte E_1 und E_2 benötigt werden.

b) Das Unternehmen möchte 15 Einheiten des Produkts E_1 und 25 Einheiten des Produkts E_2 herstellen. Wie viele Einheiten der Komponenten K_1 bis K_3 werden dafür jeweils benötigt?

c) Angenommen, jede Einheit der Komponente K_1 kostet 10 €, K_2 kostet 7 € und K_3 kostet 5 €. Bestimmen Sie die Materialkosten für eine Einheit von E_1 bzw. E_2.

10. Bestimmen Sie alle Lösungen der folgenden linearen Gleichungssysteme:

a)
$$\begin{array}{rcrcrcr} 10x & + & 15y & + & 5z & = & 5 \\ x & + & 2y & - & z & = & 4 \\ 7x & + & 11y & + & 2z & = & 7 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{rrcrcr} & 2x & - & 4y & = & 6 \\ - & 3x & + & 6y & = & -8 \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & 2x_4 & = & 6 \\ -2x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & = & -8 \end{array}$$

11. $\boxed{\text{P 6}}$ Ein Möbelhaus produziert drei Tischmodelle T_1, T_2 und T_3. Für die Produktion werden die Rohstoffe Holz (H), Glas (G) und Metall (M) benötigt. Der Bedarf der einzelnen Rohstoffe für jeweils ein Exemplar eines Tischmodells, sowie der derzeit verfügbare Lagerbestand an Rohstoffen ist der folgenden Tabelle zu entnehmen:

	Tischmodell			
Rohstoffe	T_1	T_2	T_3	Lagerbestand
H	4	3	2	206
G	1	2	3	94
M	2	1	2	114

a) Wie viele Exemplare der Tischmodelle T_1, T_2 und T_3 kann das Unternehmen herstellen, wenn der gesamte Lagerbestand verbraucht werden soll?

b) Begründen Sie, dass das gefundene Gleichungssystem genau eine Lösung besitzt.

12. $\boxed{\text{P 7}}$

a) Berechnen Sie jeweils die Determinante der folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Berechnen Sie die Determinante der Matrix C in Abhängigkeit eines Parameters $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

c) Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ ist die Matrix C singulär?

13. Gegeben sind die Vektoren $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $c = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie den Vektor $d = 3a - 2 \cdot b$ (d heißt „Linearkombination“ von a und b), skizzieren Sie ihn in einem geeigneten Koordinatensystem und berechnen Sie seinen Betrag (Länge).

b) Stellen Sie den Vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ als Linearkombination von a und b dar.

c) Was erhalten Sie, wenn Sie versuchen den Vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ als Linearkombination von b und c darzustellen?

14. Sind die folgenden Vektoren linear unabhängig?

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

15. $\boxed{\text{P 8}}$ Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Sind der erste und der dritte Spaltenvektor der Matrix A linear abhängig? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Berechnen Sie den Rang der Matrix A.

16. Gegeben ist das folgende Gleichungssystem mit einer Konstanten $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 0 \\ -2x & - & 3y & & & = & -3 \\ x & + & 3y & + & az & = & a \end{array}$$

a) Für welchen Wert a gibt es unendlich viele Lösungen? Geben Sie diese Lösungen an!

b) Für welchen Wert von a gibt es genau eine Lösung? Bestimmen Sie diese Lösung!

17. $\boxed{\text{P 9}}$ Gegeben ist das lineare Gleichungssystem $A \cdot x = b$ mit:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & t & -1 \\ 0 & 1 & t \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

wobei $t \in \mathbb{R}$.

a) Für welche Werte $t \in \mathbb{R}$ ist A singulär?

b) Untersuchen Sie für diese Werte von t, ob das Gleichungssystem keine Lösung oder unendlich viele Lösungen besitzt.

c) Für welche Werte von t besitzt das Gleichungssystem genau eine Lösung? Wählen Sie einen Wert t aus dieser Menge und geben Sie die zugehörige Lösung an.

18. Gegeben sind die Matrix A und der Vektor b:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -t \\ t & -4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad t \in \mathbb{R}$$

a) Für welche Werte von $t \in \mathbb{R}$ besitzt $Ax = 0$ eine nichttriviale Lösung?

b) Für welche Werte von $t \in \mathbb{R}$ ist $Ax = b$ lösbar?

19. Gegeben ist die Matrix A und der Vektor b:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Berechnen Sie die Inverse der Matrix A und führen Sie eine Probe durch!

b) Bestimmen Sie nun mit Hilfe der Inversen die eindeutige Lösung des Gleichungssystems $A \cdot x = b$!

Die mit $\boxed{\text{P}}$ gekennzeichneten Beispiele sind von den Studierenden vorzubereiten und nach Aufruf durch die Lehrveranstaltungsleitung zu präsentieren!