Wirtschaftsmathematik - Übungen WS 2025

Blatt 5: Funktionen von mehreren reellen Variablen

1. Skizzieren Sie in einem geeigneten Koordinatensystem die Isoquanten I_c der folgenden Funktionen zu den jeweils vorgegebenen Niveaus:

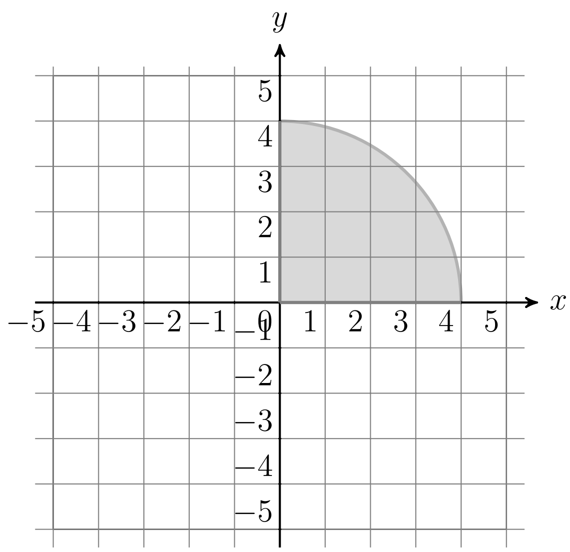
   a)
   $$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ mit } f(x,\, y) = -3x + 2y$$
   zu den Niveaus $c = 6$ und $c = 0$.

   b)
   $$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \text{ mit } f(x,\, y) = y + \frac{1}{2}x^2 - 2$$
   zu den Niveaus $c = 6$ und $c = 0$.

2. $\boxed{\text{P 41}}$ Gegeben ist eine Funktion in zwei Variablen

   $$f(x, y) = -\frac{1}{2}x + y$$

   Der Definitionsbereich dieser Funktion ist in der nachfolgenden Abbildung grau unterlegt dargestellt:



   a) Geben Sie den Definitionsbereich der Funktion in beschreibender Form an.
   b) Skizzieren Sie die Isoquanten der Funktion zu den Niveaus $c = 0$ und $c = 2$ in der obigen Graphik.
   c) Über welchem Punkt des Definitionsbereiches nimmt die Funktion f ihren maximalen Wert an? Lesen Sie die Antwort an der Grafik ab! Wie groß ist dieser maximale Wert?

3. Gegeben ist eine Funktion in zwei Variablen

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ mit } f(x,\, y) = x^3 - 2xy + 4y^2$$

   a) Bestimmen Sie die ersten partiellen Ableitungen allgemein und an der Stelle $(x, y) = (2, 1)$.
   b) Bestimmen Sie den Gradienten von f – allgemein und an der Stelle $(2, 1)$. Interpretieren Sie Ihr Resultat.

4. Gegeben ist eine Funktion in zwei Variablen

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \text{ mit } f(x,\, y) = x + 2y + \frac{9}{xy}$$

   a) Berechnen Sie die normierte Richtungsableitung der Funktion f an der Stelle $(1, 3)$ in Richtung des Vektors $\vec{z} = \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \end{pmatrix}$.
   b) Berechnen Sie die normierte Richtungsableitung der Funktion f an der Stelle $(1, 3)$ in Richtung des steilsten Funktionswertanstiegs.
   c) Wie ändert sich der Funktionswert näherungsweise, wenn man, ausgehend von der Stelle $(1, 3)$, x um $dx = -0,1$ und y um $dy = 0,2$ Einheiten verändert?

5. P 42 Gegeben ist die Funktion

$$f(x, y) = (3x - y) \cdot e^{x^2 - y}$$

   Bestimmen Sie an der Stelle $(2, 4)$ die normierte Richtungsableitung in Richtung des Vektors $z = \begin{pmatrix} 24 \\ -7 \end{pmatrix}$.

6. P 43 Gegeben ist eine Funktion in zwei Variablen

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{++} \to \mathbb{R} \text{ mit } f(x, y) = \frac{-x}{y^2} + (x - 1) \cdot \ln(y)$$

   Wie ändert sich der Funktionswert näherungsweise, wenn man sich vom Punkt $(3 \;\; 1)$ in den Punkt $(2,8 \;\; 1,4)$ bewegt?

7. Gegeben ist die Funktion $f(x, y) = (x - 6)^2 + (x + 2) \cdot y^2 - 3$.
   a) Untersuchen Sie f auf stationäre Stellen.
   b) Wie lautet die Hesse-Matrix?
   c) Klassifizieren Sie die unter a) ermittelten stationären Stellen.

8. $\boxed{\text{P 44}}$ Gegeben ist die Funktion in zwei Variablen

$$f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto 3x^2 - 2x \cdot \sqrt{y} - 8x + y + 3$$

   a) Ermitteln Sie die stationären Stellen von f.
   b) Wie lautet die Hesse-Matrix?
   c) Klassifizieren Sie die unter a) ermittelten stationären Stellen.

9. Die Nachfrage nach einem Gut hängt nicht nur vom Preis p_1 dieses Gutes, sondern auch vom Preis p_2 eines zweiten Gutes ab:

$$N^1(p_1, p_2) = \frac{2 \cdot e^{5p_2}}{p_1^2}$$

   a) Um wie viel Prozent ändert sich die Nachfrage näherungsweise, wenn man – ausgehend von $(p_1, p_2) = (2, 3)$ – den Preis p_1 um ein Prozent erhöht?
   b) Um wie viel Prozent ändert sich die Nachfrage näherungsweise, wenn man – ausgehend von $(p_1, p_2) = (2, 3)$ – den Preis p_2 um ein Prozent erhöht?

10. Ein Monopolist stellt zwei Güter her. Die Nachfragefunktionen der beiden Güter lauten:

$$x_1(p_1) = 30 - 3p_1$$

$$x_2(p_2) = 30 - 2p_2$$

Die Herstellungskosten sind gegeben durch $K(x_1, x_2) = \dfrac{1}{9}x_1^2 + \dfrac{1}{3}x_1 \cdot x_2 + 6x_2 + 20$.

   a) Für welche Absatzmengen x_1, x_2 und welche Preise p_1, p_2 wird der Gewinn maximal? Nehmen Sie dabei an, dass die gesamte Produktionsmenge abgesetzt wird. Prüfen Sie sowohl die notwendige als auch die hinreichende Bedingung.
   b) Wie hoch ist der maximal erzielbare Gewinn?

11. Die Faktoreinsatzmengen Arbeit, Kapital und Energie für die Cobb-Douglas-Produktionsfunktion

$$f(A, K, E) = 5A \cdot \sqrt{K^3 \cdot E}$$

betragen $A = 2$, $K = 1$, $E = 9$.

a) Geben Sie einen ökonomisch sinnvollen Definitionsbereich an.

b) Bestimmen Sie den Homogenitätsgrad.

c) Wie viele Einheiten von A muss man näherungsweise zusätzlich einsetzen, um eine Einheit von K zu ersetzen, wenn das Produktionsniveau dabei unverändert bleiben soll?

d) Um wie viel Prozent ändert sich das Produktionsniveau näherungsweise, wenn der Faktor K um 2 % erhöht wird und die anderen Faktoren unverändert bleiben?

e) Um wie viele Einheiten ändert sich das Produktionsniveau näherungsweise, wenn der Faktor E um eine Einheit erhöht wird und die anderen Faktoren unverändert bleiben?

12. Gegeben ist die Funktion:

$$f(x, y) = \frac{3x^2 \cdot y^2}{x^2 - y^2}$$

a) Ist diese Funktion homogen?

b) Wie ändert sich der Funktionswert näherungsweise, wenn man, ausgehend von der Stelle $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$, x um $dx = -\frac{1}{10}$ und y um $dy = \frac{1}{10}$ Einheiten verändert?

Die mit $\boxed{\text{P}}$ gekennzeichneten Beispiele sind von den Studierenden vorzubereiten und nach Aufruf durch die Lehrveranstaltungsleitung zu präsentieren!