Wirtschaftsmathematik - Übungen WS 2025

Blatt 4: Funktionen von einer Variablen

1. Gegeben sind die Mengen

$$A = \{1, 2\} \quad \text{und} \quad B = \{1, 3, 5\}$$

sowie die Zuordnungsvorschrift $f : A \to B$, $y = f(x)$ mit

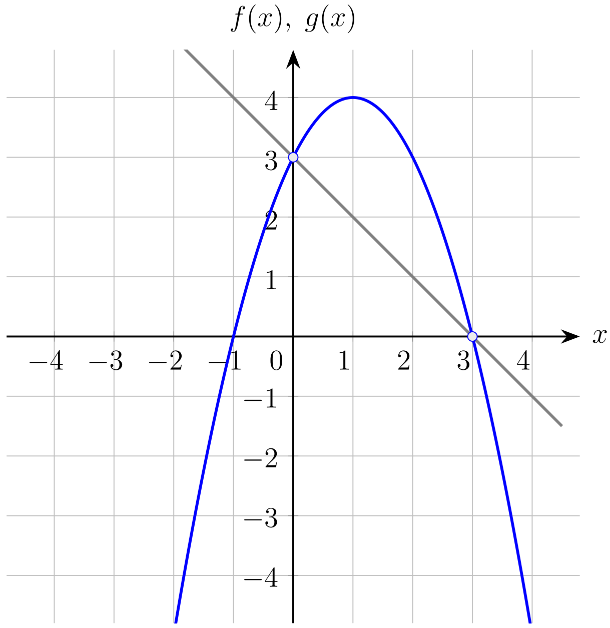
$$f(x) = 2x - 1$$

a) Skizzieren Sie diese Zuordnungsvorschrift in einem Pfeildiagramm, und begründen Sie, warum durch die Vorschrift f eine Funktion definiert ist.

b) Bestimmen Sie die Bildmenge der Funktion.

c) Ist die Funktion f injektiv, surjektiv oder bijektiv? Existiert eine Umkehrfunktion zu f? Begründen Sie!

2. $\boxed{\text{P 29}}$ Im folgenden Graphen ist eine Funktion der Form $f(x) = ax^2 + bx + c$ mit den reellen Parametern a, b, c und eine Funktion der Form $g(x) = kx + d$ gegeben.



Lesen Sie die Antworten auf folgende Fragen direkt aus dem Graphen ab und begründen Sie kurz! Gehen Sie davon aus, dass die eingezeichneten Punkte ganzzahlige Koordinaten besitzen.

a) Bestimmen Sie k und d.

b) Für welche x gilt $f(x) = g(x)$?

c) Für welche x gilt $g(x) < 0$?

d) Für welche x gilt $f'(x) \geq 0$?

e) Geben Sie die Gleichung einer Geraden h an, die parallel zu g verläuft und den Punkt $(0, 1)$ enthält.

	Antwort	Begründung
a)		
b)		
c)		
d)		
e)		

3. Für welche reellen Zahlen x ist die folgende Funktion

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x - 2}$$

definiert?

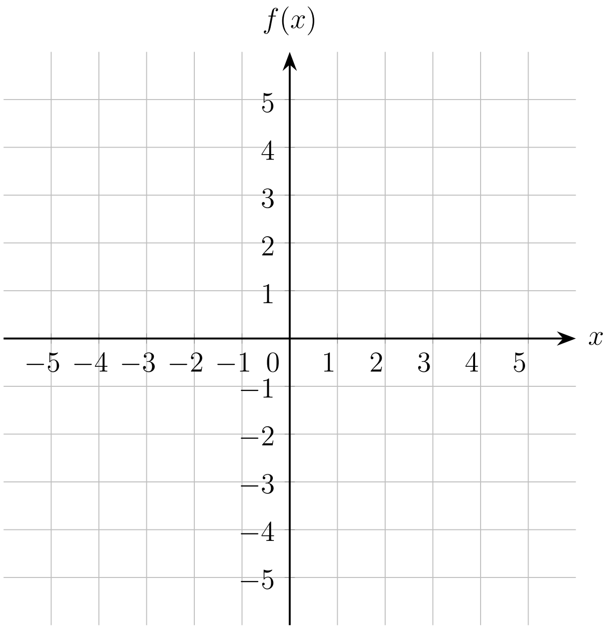
4. $\boxed{\text{P 30}}$ Eine Polynomfunktion dritten Grades hat folgende Eigenschaften:
   - die Funktion hat an der Stelle $x = -2$ ein lokales Minimum.
   - Der Graph der Funktion schneidet die y-Achse im Punkt $(0, 0)$.

   a) Skizzieren Sie den Graphen einer möglichen Funktion f in das nachsehende Koordinatensystem.

   b) Lesen Sie aus Ihrer Zeichnung ab, an welcher Stelle die Funktion ihr Krümmungsverhalten ändert.

   c) Bestimmen Sie für Ihre Zeichnung alle x, deren zugehöriger Funktionswert negativ ist.

   d) Wie viele Nullstellen besitzt Ihre Funktion?



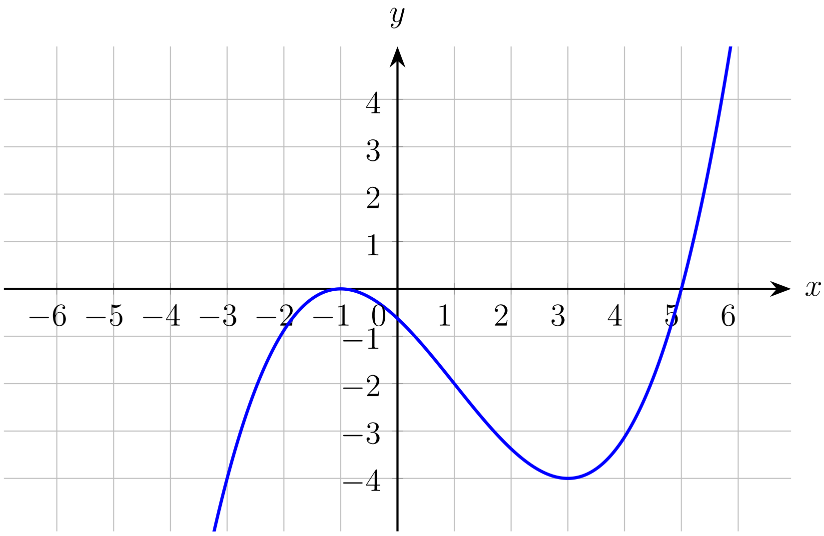
5. Gegeben ist die Funktion $f : [2; 6] \to [3; 5]$, $x \mapsto f(x)$ mit

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 2$$

   a) Skizzieren Sie diese Funktion in einem Koordinatensystem.

   b) Ist die Funktion f bijektiv? Existiert eine Umkehrfunktion zu f? Bestimmen Sie, wenn möglich, die Umkehrfunktion.

6. Die nachfolgende Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion. Skizzieren Sie die erste und zweite Ableitung dieser Funktion!



7. Gegeben ist die Funktion $f:\ D \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x)$ mit

$$f(x) = \left(\frac{3}{2}x + 3\right) \cdot e^{-\frac{x}{2}}$$

Diskutieren Sie diese Funktion, d. h. bestimmen Sie die größtmögliche Definitionsmenge $D \subseteq \mathbb{R}$, Nullstellen, Extremstellen, Wendepunkte, Monotonie, das Krümmungsverhalten und das Verhalten im Unendlichen. Skizzieren Sie den Graphen!

8. $\boxed{\text{P 31}}$ Gegeben ist die Funktion

$$f : D \to R,\ f\,(x) = \frac{\ln\left(4 - x^2\right)}{x}$$

   a) Für welche reellen Zahlen x ist die Funktion $f(x)$ definiert?
   b) Bestimmen Sie die erste Ableitung der Funktion f. Welche Regeln haben Sie verwendet?

9. $\boxed{\text{P 32}}$ Gegeben ist die Funktion

$$f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ \text{ mit } \quad f(x) = \ln\left(\frac{4}{x}\right)$$

Für welche $x \in D$ ist die Funktion f streng monoton steigend?

10. $\boxed{\text{P 33}}$ Gegeben ist die Funktion

$$f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad f(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + 2x + 5$$

Für welche $x \in D$ ist die Funktion f konkav?

11. Bestimmen Sie die Grenzwerte:

$$a)\ \lim_{x \to 1} \frac{x-1}{2x^2 - 2x} \qquad b)\ \lim_{x \to \infty} \left(\frac{3}{2}x + 3\right) \cdot e^{-\frac{x}{2}}$$

12. $\boxed{\text{P 34}}$ Bestimmen Sie den Grenzwert:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} - 1 - 2x}{x^2}$$

13. Gegeben ist die Funktion

$$f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 8$$

Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente im Wendepunkt der Funktion f.

14. Berechnen Sie sämtliche Stammfunktionen für:

$$a)\ f(x) = 6x^2 - x + x^{\frac{3}{2}} \qquad\qquad b)\ f(x) = \frac{(x+1)^2}{\sqrt[3]{x}}$$

Verifizieren Sie Ihre Lösung!

15. $\boxed{\text{P 35}}$ Bestimmen Sie alle Funktionen, deren zweite Ableitung $f''(x) = \frac{3}{2}x - \frac{4}{x^2}$ ist.

16. Berechnen Sie:

$$a)\ \int \frac{3}{\sqrt{4x+1}}\,dx \qquad\qquad b)\ \int 3x \cdot e^{x^2+1}\,dx$$

17. $\boxed{\text{P 36}}$ Bestimmen Sie:

$$\int \frac{3x^2}{x^3 - 4}\,dx$$

18. a) Berechnen Sie den Wert des folgenden bestimmten Integrals:

$$\int_0^5 \left(4 - \frac{1}{4}x^2\right) dx$$

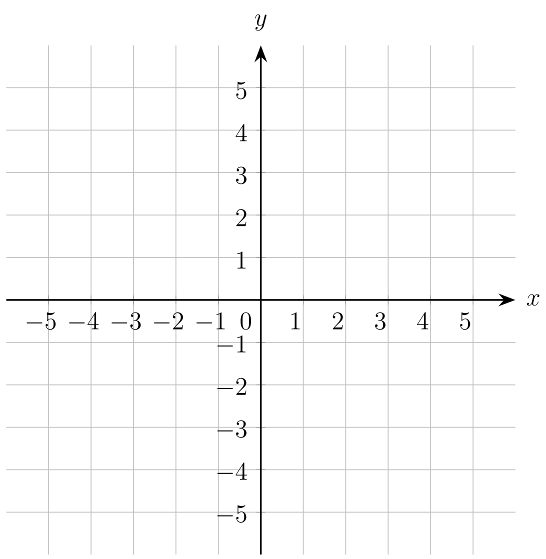
b) Skizzieren Sie den Integranden in einem geeigneten Koordinatensystem. Entspricht der Wert des in a) berechneten bestimmten Integrals dem Flächeninhalt, den die Funktion $f(x) = 4 - \frac{1}{4}x^2$ mit der x-Achse im Intervall $[0; 5]$ einschließt?

19. P 37 Gegeben ist die Funktion $f(x) = 4x - x^3$.

a) Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f.

b) Skizzieren Sie die Funktion im nachstehenden Koordinatensystem.

c) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die die Funktion f mit der x-Achse im Intervall $[1; 3]$ einschließt?



20. Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mit:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 1 \\ 2 - x & x > 1 \end{cases}$$

a) Skizzieren Sie die Funktion in einem geeigneten Koordinatensystem und überprüfen Sie graphisch, ob die Funktion auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist.

b) Existiert die Ableitung $f'(x)$ an der Stelle $x = 1$? Begründen Sie!

c) Wie groß ist die Fläche, die zwischen der Funktion f und der Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mit $g(x) = 1$ im Intervall $[0; 1]$ eingeschlossen wird?

21. In einem Land gilt folgende Form einer progressiven Einkommensteuer:

Für Einkommensteile	**Steuersatz**
0 bis einschließlich 1000.- jährlich	0 %
über 1000.- bis einschließlich 6000.- jährlich	10 %
über 6000.- jährlich	20 %

a) Erstellen Sie eine stückweise lineare Funktion $T(x)$, die die Höhe der abzuführenden Steuer in Abhängigkeit von der Höhe des Einkommens beschreibt und skizzieren Sie deren Graphen.

b) Bestimmen Sie die zu entrichtende Einkommensteuer für ein Einkommen in Höhe von 3500.-

22. Die Kostenfunktion eines Betriebes kann näherungsweise durch eine quadratische Funktion $K(x) = ax^2 + bx + c$ dargestellt werden. Bei einer Produktion von 4 Mengeneinheiten (ME) entstehen Gesamtkosten von 29 Geldeinheiten (GE), und bei einer Produktion von 2 ME betragen die Kosten 13 GE. Die Grenzkosten bei einer Produktion von 2 ME betragen 6 GE. Der Marktpreis, zu dem verkauft werden kann, beträgt $p = 8$ GE/ME.

a) Ermitteln Sie die Kostenfunktion.

b) Ermitteln Sie die Gewinnfunktion.

c) Für welche Produktionsmengen erzielt das Unternehmen Gewinn?

d) Bei welcher Produktionsmenge ist der Gewinn maximal? Ermitteln Sie den maximalen Gewinn.

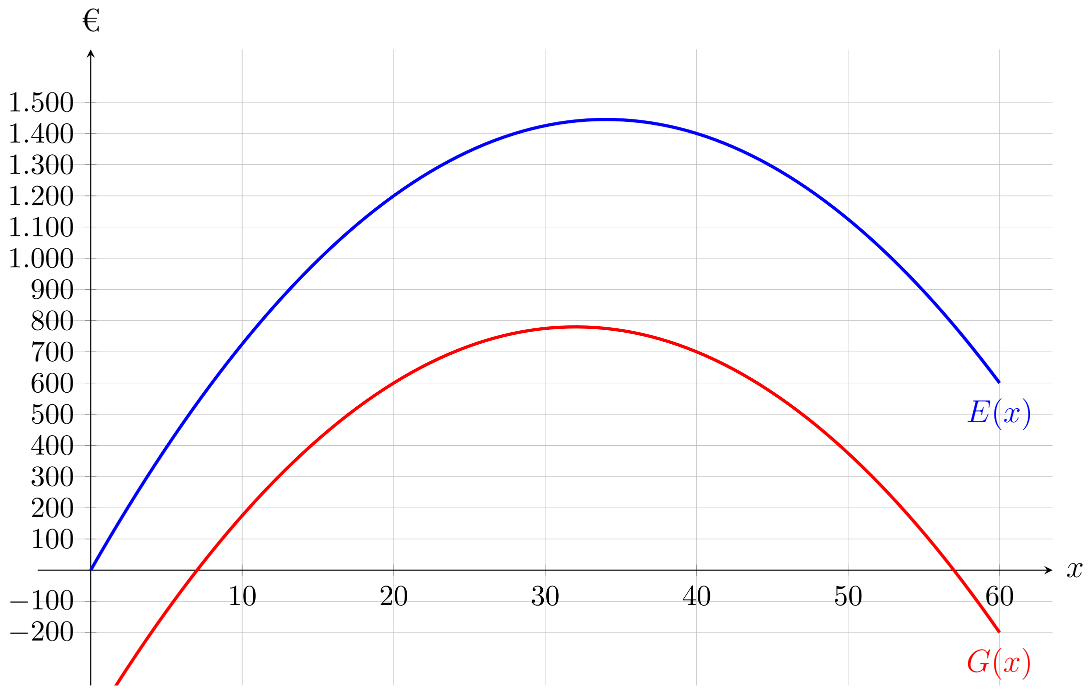
23. P 38 Die Funktion E beschreibt den Erlös (in €) bei einem Absatz von x Mengeneinheiten eines Produktes. Die Funktion G beschreibt den dabei erzielten Gewinn in €. Dabei kann der Betrieb aus kapazitätstechnischen Gründen höchstens 60 Mengeneinheiten produzieren und absetzen.

a) Nehmen Sie an, dass die Kostenfunktion K linear ist. Skizzieren Sie in der nachstehenden Abbildung den Graphen der Kostenfunktion K, der zu den gegebenen Funktionen gehört.

Beantworten Sie die folgenden Fragen durch näherungsweises Ablesen aus der Grafik im Bereich $0 \leq x \leq 60$:

b) Für welche Verkaufsmengen erzielt der Betrieb Gewinn?

c) In welchem Bereich erzielt der Betrieb trotz steigender Absatzmenge immer weniger Erlös?



24. Die Grenzkostenfunktion eines Betriebes kann annähernd durch die Funktion

$$K'(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x + 4$$

dargestellt werden. Bei Stillstand der Produktion betragen die Gesamtkosten 3 GE. Die Preis-Absatz-Funktion des Betriebes lautet

$$p(x) = -\frac{x^2}{9} - \frac{2}{3}x + 8$$

a) Bestimmen Sie den Höchstpreis, die Sättigungsmenge sowie eine ökonomisch sinnvolle Definitionsmenge. Skizzieren Sie die Preis-Absatz-Funktion im ermittelten Definitionsbereich.

b) Bestimmen Sie die Kostenfunktion $K(x)$, sowie die Erlösfunktion $E(x)$.

c) Ermitteln Sie die gewinnmaximale Ausbringungsmenge. Zeigen Sie, dass es sich tatsächlich um ein Maximum handelt.

d) In welchem Bereich arbeitet der Betrieb mit degressiven Kosten?

25. P 39 Eine Grenzkostenfunktion ist gegeben durch $K'(x) = 3x^2 - \frac{3x}{2} + 4$.

a) Bestimmen Sie die Kostenfunktion, wenn für eine Produktion von vier Einheiten Gesamtkosten in Höhe von 85 anfallen.

b) Bestimmen Sie den Wert der Durchschnittskostenfunktion für eine Produktionsmenge von $x = 2$ Einheiten.

26. Eine Nachfragefunktion ist gegeben durch: $N : D \to \mathbb{R}$, $p \mapsto N(p)$ mit

$$N(p) = \begin{cases} 10 - p & \text{für} \quad p \leq 4 \\ 12 - \frac{3}{2}p & \text{für} \quad p > 4 \end{cases}$$

a) Geben Sie einen ökonomisch sinnvollen Definitionsbereich dieser Nachfragefunktion an und skizzieren Sie den Funktionsgraphen in einem geeigneten Koordinatensystem.

b) Überprüfen Sie graphisch, ob N an der Stelle $p = 4$ stetig ist.

c) Bestimmen Sie zum Preis $p = 6$ die Preiselastizität der Nachfrage und interpretieren Sie den erhaltenen Wert.

27. $\boxed{\text{P 40}}$ Eine Nachfragefunktion ist gegeben durch: $n : D \to \mathbb{R}$, $p \mapsto n(p)$ mit

$$n\,(p) = \frac{50}{2p + 1}$$

Um wie viel Prozent ändert sich die Nachfrage näherungsweise, wenn p ausgehend von $p = 2$ EUR um 1 % erhöht wird?

Die mit $\boxed{\text{P}}$ gekennzeichneten Beispiele sind von den Studierenden vorzubereiten und nach Aufruf durch die Lehrveranstaltungsleitung zu präsentieren!