Wirtschaftsmathematik - Übungen WS 2025

Blatt 3: Folgen und Reihen

1. Gegeben ist die Folge
$$a_n = \frac{6n}{2n-1}$$
   a) Berechnen Sie die ersten vier Glieder dieser Folge. Stellen Sie eine Vermutung über das Monotonieverhalten auf und beweisen Sie diese Vermutung.
   b) Zeigen Sie, dass 2 eine untere Schranke dieser Folge ist.
   c) Bestimmen Sie – wenn möglich – eine obere Schranke und begründen Sie Ihre Wahl. Was lässt sich dann über Beschränktheit und Konvergenz der Folge aussagen?

2. Untersuchen Sie die durch ihr Bildungsgesetz angegebene Folge auf Monotonie, Beschränktheit und Konvergenz:
$$b_n = 2n - 1$$

3. $\boxed{\text{P 21}}$ Gegeben ist die Folge:
$$a_n = \frac{2n}{n+1}$$
   a) Formulieren Sie eine Vermutung über die Monotonie der Folge und beweisen Sie diese!
   b) Zeigen Sie, dass $\frac{9}{5}$ keine obere Schranke der Folge ist.
   c) Bestimmen Sie – wenn möglich – eine untere Schranke und begründen Sie Ihre Wahl.

4. $\boxed{\text{P 22}}$ Gegeben ist eine arithmetische Folge
$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$
   a) Setzen Sie $a_1 = 2$ und $d = 3$ und berechnen Sie s_{12}.
   b) Setzen Sie $a_1 = 5$ und berechnen Sie d, wenn bekannt ist, dass $a_{10} + a_{11} = 86$ gilt.
   c) Setzen Sie $d = 4$ und bestimmen Sie dann a_1, wenn bekannt ist, dass $s_{24} = 768$ ist.

5. Gegeben ist die Folge

$$a_n = 16 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$

a) Zeigen Sie $\forall n \in \mathbb{N}$, dass es sich um eine geometrische Folge handelt.

b) Bestimmen Sie a_1 und a_5.

c) Bestimmen Sie s_5.

6. P 23 In einer geometrischen Folge mit $q = \frac{3}{2}$ beträgt die Summe der ersten acht Glieder 6.305. Berechnen Sie a_1.

7. Bestimmen Sie die Grenzwerte:

$$a)\ \lim_{n\to\infty} \frac{4n-5n^2}{3n^2+2} \qquad\qquad b)\ \lim_{n\to\infty} \left(\frac{8n^2+1}{2n-2} - \frac{4n^2+5n}{n+3}\right)$$

8. P 24 Bestimmen Sie mit Hilfe der Grenzwertrechenregeln den Grenzwert:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{9n^2+6}{3n-4} - \frac{n\cdot(3n-2)}{n+6}\right)$$

9. Gegeben ist die Folge

$$a_n = \frac{1}{2^n}$$

a) Geben Sie zur Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die zugehörige Reihe $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an, indem Sie die Partialsummen S_n berechnen.

b) Geben Sie im Fall der Existenz den Grenzwert der zugehörigen Reihe an.

c) Schreiben Sie die Reihe unter Verwendung des Summenzeichens und berechnen Sie – sofern möglich – diese Summe.

10. P 25 Gegeben ist die Folge $a_n = 12 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

Geben Sie eine Formel für die Partialsummen S_n an und berechnen Sie mit Hilfe dieser Formel: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

11. Prüfen Sie, ob die folgenden Reihen konvergieren. Wenn ja, was ist ihre Summe?

$$a)\ 7 \cdot \sum_{n=2}^{\infty} 2^n \cdot 3^{2-2n} \qquad\qquad b)\ \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{9^i}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$$

12. $\boxed{\text{P 26}}$ Gegeben ist die Folge

$$a_n = 2^{2n} \cdot 5^{1-n}$$

Ist $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ konvergent? Begründung! Bestimmen Sie – wenn möglich – den Wert der Reihe.

13. Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die folgende geometrische Reihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{5^n}$$

Fertigen Sie für die folgenden Aufgaben jeweils eine graphische Darstellung der Zahlungsströme an und lösen Sie dann die Aufgaben. Geben Sie sämtliche Zwischenschritte zur Bestimmung der jeweiligen Lösung an. Das Anschreiben einer Formel alleine genügt nicht!

14. Herr K. verkauft eine Immobilie. Er kann zwischen drei Angeboten wählen:

    Angebot A: € 10.000 sofort,

    Angebot B: € 13.000 in sieben Jahren, d. h. zu $t = 7$,

    Angebot C: Sieben Jahre lang, eine jeweils am Ende eines Jahres zu zahlende Rente in Höhe von € 1.900.

    Vergleichen Sie die Angebote bei einem Zinssatz von 5 % p.a. und ermitteln Sie jeweils den Barwert und den Endwert.

15. Eine Firma plant, in eine Maschine mit einer Nutzungsdauer von 10 Jahren zu investieren. Für die Maschine fallen zu $t = 0$ Anschaffungskosten in der Höhe von € 40.000 an. Nach zehn Jahren (d.h. zu $t = 10$) kann die Maschine zu einem Restwert in Höhe von € 2.000 verkauft werden. Durch Produktion und Verkauf generiert die Firma, zehn Jahre lang, jeweils am Jahresende (beginnend zu $t = 1$), einen Gewinn in der Höhe von € 10.000.

    a) Soll die Firma diese Investition tätigen, wenn sie mit einem kalkulatorischen Jahreszinssatz von $i = 0,05$ p.a. rechnet und nach dem Kapitalwertkriterium entscheidet?

    b) Berechnen Sie den Kapitalwert K für das Investitionsprojekt, wenn das Unternehmen mit Anschaffungskosten in Höhe von € 40.000 kalkuliert, jedoch eine unendliche Nutzungsdauer und einen Restwert von € 0 unterstellt.

16. $\boxed{\text{P 27}}$ Ein Unternehmen plant, in 15 Jahren eine neue Produktionsmaschine anzuschaffen.

    a) Daher beginnt es jeweils am Beginn eines Jahres, einen Betrag in Höhe von € 4.000 zu einem Zinssatz von 3 % p.a. anzulegen. Wie hoch ist der Wert aller Einzahlungen nach fünfzehn Jahren?

    b) Eine andere Bank bietet an, einen Anfangsbetrag in der Höhe von € 20.000 so zu verzinsen, dass sich der Betrag jedes Jahr um den Faktor 1,04 erhöht. Nach wie vielen vollen Jahren übersteigt dann das Kapital erstmals € 40.000?

17. Frau A. zahlt zu Beginn jeden Jahres, zehn Jahre lang, einen Geldbetrag R in einen Aktienfonds ein, um am Ende des zehnten Jahres einen Wintergarten im Wert von € 20.000 finanzieren zu können. Wie hoch muss der Geldbetrag sein, wenn die Verzinsung jährlich 7 % beträgt?

18. P 28 Ein Sparer legt € 223.162,12 in einem Fonds an und möchte, zwanzig Jahre lang, beginnend ein Jahr nach der Einzahlung, jeweils am Jahresanfang einen Betrag R entnehmen. Wie hoch ist dieser Betrag, wenn man einen Kalkulationszinssatz von $i = 0,03$ p.a. unterstellt und nach der letzten Auszahlung € 0 im Fonds verbleiben sollen?

19. a) Herr E. zahlt zwölfmal im Jahr einen Betrag in Höhe von € 1.000.- jeweils am Beginn jeden Monats auf ein Sparkonto ein, das mit $i = 3\,\%$ p. a. verzinst ist (Zinsverrechnung erfolgt am Sparkonto nur am Jahresende).

    b) Frau L. zahlt viermal im Jahr einen Betrag in Höhe von € 1.000.- jeweils am Beginn jeden Quartals auf ein Girokonto ein, das mit $i = 4\,\%$ p. a. verzinst ist (Zinsverrechnung erfolgt bei diesem Girokonto am Ende jeden Quartals).

    Welcher Betrag befindet sich am Ende des Jahres auf dem jeweiligen Konto? Hinweis: Für Zeiträume unter einem Jahr werden Zinsen linear verrechnet!

Die mit P gekennzeichneten Beispiele sind von den Studierenden vorzubereiten und nach Aufruf durch die Lehrveranstaltungsleitung zu präsentieren!