

Wirtschaftsmathematik - Übungen WS 2025

Blatt 1: Lineare Algebra

1. Gegeben ist eine 4×3 Matrix $A = (a_{ij})$ mit

$$a_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{4} \cdot 2^{i+j} & \text{für } i < j \\ (-1)^j \cdot i & \text{für } i = j \\ i + j & \text{sonst} \end{cases}$$

eine Matrix $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, ein Zeilenvektor $u^T = (1 \ 0 \ -1)$ sowie ein Spaltenvektor $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

- a) Schreiben Sie die Matrix A an.
 - b) Berechnen Sie $u^T \cdot v$.
 - c) Berechnen Sie – wenn möglich: $A \cdot B^T$ und $B^T \cdot A$.
2. P 1 Gegeben ist eine 3×3 Matrix $B = (b_{ij})$ mit

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = 1 \\ 2^{j-i} & \text{für } j \geq i > 1 \\ 0 & \text{für } j < i \end{cases}$$

sowie die Matrix A und der Vektor x :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie – wenn möglich

- a) $B - A$, $A \cdot B$
- b) $A^T \cdot B^T$, $A \cdot x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

3. **P 2** Was versteht man unter einer symmetrischen Matrix? Zeigen Sie nun anhand von zwei allgemeinen symmetrischen Matrizen der Dimension 2×2 , dass deren Produkt im Allgemeinen nicht symmetrisch ist.
4. Gegeben sind die regulären (invertierbaren) $n \times n$ -Matrizen A , B , C und X . E ist eine Einheitsmatrix der Dimension $n \times n$. Lösen Sie die folgenden Matrizengleichungen nach der Matrix X auf. Welche Bedingung muss dabei noch gelten?
- a) $A \cdot (B + X \cdot C) = C$
- b) $(A \cdot X^T)^T - X \cdot B + 3C = E$
5. **P 3** U , V , W und X sind reguläre (invertierbare) $n \times n$ -Matrizen. Bestimmen Sie die Lösungsmatrix X der folgenden Matrizengleichung:

$$(U - V) \cdot X = -UX + W$$

Welche Bedingung muss außerdem noch erfüllt sein?

6. In einem Staat gibt es nur zwei Parteien, D und R . Langfristige Beobachtungen des Wahlverhaltens der wahlberechtigten Personen bei einer Wahl haben ergeben, dass 70 % der Wählerinnen und Wähler von Partei D und 80 % der Wählerinnen und Wähler von Partei R ihrer Partei treu bleiben. Die Wählenden von Partei D wechseln zu 30 % zur Partei R , während sich umgekehrt 20 % der Wählenden von Partei R bei der folgenden Wahl für die Partei D entscheiden. Bei der letzten Wahl erhielt die Partei D 60 % und Partei R 40 % aller Stimmen.
- a) Geben Sie die zugehörige Übergangsmatrix an.
- b) Bestimmen Sie anhand dieser Matrix die zu erwartende Stimmenverteilung nach der nächsten Wahl.
- c) Wie viele der Wählerinnen und Wähler der Partei R müssen ihrer Partei treu bleiben, wenn die Partei R bei der nächsten Wahl ihren jetzigen Stimmenanteil auf 54 % steigern möchte und die Wählerinnen und Wähler der Partei D ihr Wahlverhalten beibehalten?
- d) Wie war die Stimmverteilung vor der letzten Wahl, wenn man annimmt, dass die Übergangsmatrix aus a) auch für die Vorperiode gegolten hat?

Hinweis: Für die Inverse einer 2×2 -Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ gilt: $A^{-1} = \frac{1}{a \cdot d - b \cdot c} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

7. P 4 Ein Land ist in drei demographische Regionen aufgeteilt: A , B und C . Untersuchungen des Mobilitätsverhaltens der Bevölkerung haben zu folgendem Modell geführt:

Im Laufe eines Jahres ziehen von der Bevölkerung aus Region A jeweils 5 % nach Region B und 5 % nach Region C . Von der Bevölkerung in Region B ziehen 15 % nach A und 10 % nach C , und von Region C ziehen 10 % nach A und 5 % nach B .

Es wird angenommen, dass die Gesamtbevölkerung konstant bleibt (genauso viele Geburten wie Todesfälle). Die Einwohnerzahlen zu Beginn des Jahres 2024 betragen (in Millionen):

Region A : 3,5 Region B : 4,7 Region C : 8,9

- a) Stellen Sie die Übergangsmatrix für das nächste Jahr auf.
- b) Wie viele Einwohner hat jede der drei Regionen Ende 2024?
- c) Wie viele Einwohner werden im Laufe des Jahres 2024 umziehen?
- d) Wie viel Prozent der Einwohner, die 2024 in Region A lebten, sind nach zwei Jahren (unter der Annahme, dass der Übergangsprozess in beiden Jahren unverändert bleibt) immer noch in Region A ?

8. Im Rahmen der Textilproduktion eines Unternehmens sollen Sporthosen und Funktions-shirts hergestellt werden. Dazu werden die Rohstoffe Baumwolle (B), Elasthan (E) und Polyamid (P) verwendet. Aus diesen Rohstoffen werden zunächst zwei Stoffe, Jersey und Stretch, gefertigt, die dann in der Weiterverarbeitung zu Sporthosen (SH) und Funktions-shirts (FS) verarbeitet werden.

Die Herstellung der Zwischenprodukte aus Rohstoffen erfolgt nach folgender Bedarfsmatrix (Rohstoffbedarf in kg pro Meter Stoff):

	Jersey	Stretch
Baumwolle	2	0,3
Elasthan	0,5	0,2
Polyamid	0	1

Für die Produktion einer Sporthose werden 1,5 Meter Jersey und 0,5 Meter Stretch, sowie zusätzlich 0,1 kg Polyamid benötigt. Ein Funktionsshirt benötigt 1 Meter Jersey und 0,3 Meter Stretch.

- Berechnen Sie die Gesamtbedarfsmatrix, die den Bedarf an Rohstoffen pro Endprodukt (Sporthose, Funktionsshirt) angibt, mithilfe von Matrizenmultiplikation und Addition.
- Ein Kunde bestellt 100 Sporthosen und 200 Funktionsshirts. Bestimmen Sie mithilfe der Gesamtbedarfsmatrix den Bedarf an Baumwolle, Elasthan und Polyamid für diesen Auftrag.
- Die Preise in € für die Rohstoffe betragen (pro Kilogramm):

Baumwolle	Elasthan	Polyamid
3	10	5

Berechnen Sie – unter der Annahme, dass keine Fixkosten anfallen – die Kosten des Auftrags aus b).

- In einer Woche werden 1000 Sporthosen und 2000 Funktionsshirts hergestellt. Wie viele Meter Jersey und wie viel Meter Stretch werden dafür benötigt?
- Wenn noch 600 Meter Jersey, 190 Meter Stretch und 100 kg Polyamid auf Lager sind, wie viele Sporthosen und wie viele Funktionsshirts können dann noch hergestellt werden, wenn der gesamte Stoffvorrat zur Gänze aufgebraucht werden soll?

9. **P 5** Aus den drei Rohstoffen R_1 , R_2 und R_3 werden die beiden Zwischenprodukte Z_1 und Z_2 hergestellt, die wiederum zu den Endprodukten E_1 und E_2 weiterverarbeitet werden. Die jeweils benötigten Mengen finden Sie in nachstehenden Tabellen:

	Zwischenprodukte	
Rohstoffe	Z_1	Z_2
R_1	2	2
R_2	1	3
R_3	5	3

	Zwischenprodukte	
Endprodukte	Z_1	Z_2
E_1	4	3
E_2	1	3

- a) Stellen Sie die Gesamtbedarfsmatrix der Rohstoffe für jeweils ein Stück E_1 und E_2 durch Matrizenmultiplikation auf. Was bedeuten deren Einträge?
- b) Ein Kunde bestellt 10 E_1 und 20 E_2 . Wie hoch ist der Bedarf an Rohstoffen für diesen Auftrag?
- c) Die Preise in € für die Rohstoffe betragen (pro Einheit):

R_1	R_2	R_3
100	200	400

Berechnen Sie – unter der Annahme, dass jeder Auftrag mit Fixkosten von 3.000.- verbunden ist – die Kosten des Auftrags aus c).

10. Bestimmen Sie alle Lösungen der folgenden linearen Gleichungssysteme:

$$\begin{array}{rclcl} \text{a)} & \frac{1}{3}x & + & \frac{1}{2}y & + & \frac{1}{6}z & = & \frac{1}{6} \\ & x & + & 2y & - & z & = & 4 \\ & -3x & - & 5y & & & = & -5 \end{array}$$

$$\begin{array}{rclcl} \text{b)} & 2x_1 & - & 4x_2 & = & 4 \\ & 5x_1 & - & 10x_2 & = & -8 \end{array}$$

$$\begin{array}{rclcl} \text{c)} & x & + & y & + & z & - & w & = & 1 \\ & -2x & - & y & - & 2z & + & w & = & -2 \\ & -x & - & y & - & z & + & w & = & -1 \end{array}$$

11. P6 Ein Hersteller von Nahrungsergänzungsmitteln wirbt damit, dass sein Multivitaminpräparat die optimale Menge an Vitaminen A, B und C mit den Mengeneinheiten (ME)

$$A = 16, \quad B = 19, \quad C = 36$$

enthält.

Kann dieselbe Vitaminzufuhr auch durch eine entsprechende Mischung aus Obst sichergestellt werden, wenn die Vitamingehalte pro Anteilseinheit Obst in ME folgendermaßen gegeben sind:

	A	B	C
Orange	2	5	9
Kiwi	4	6	12
Mango	8	3	6

Falls ja, zu welchen Anteilen muss das Obst gemischt werden?

12. P 7

a) Berechnen Sie jeweils die Determinante der folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} -35 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

b) Berechnen Sie die Determinante der folgenden Matrix auf zwei Arten. Welche Besonderheit können Sie sich dabei zunutze machen?

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}$$

13. Gegeben sind die Vektoren $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $c = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie den Vektor $d = a + 2 \cdot b$ (d heißt „Linearkombination“ von a und b), skizzieren Sie ihn in einem geeigneten Koordinatensystem und berechnen Sie seinen Betrag (Länge).

b) Stellen Sie den Vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ als Linearkombination von a und b dar.

c) Was erhalten Sie, wenn Sie versuchen den Vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ als Linearkombination von b und c darzustellen?

14. Sind die folgenden Vektoren linear unabhängig?

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

15. P 8 Gegeben ist die Matrix C mit einem Parameter $t \in \mathbb{R}$:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & t & 1 \\ 0 & -t & 2 \\ -t & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- a) Berechnen Sie die Determinante der Matrix C in Abhängigkeit von t .
- b) Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist die Matrix C invertierbar?
- c) Welchen Rang besitzt die Matrix C für $t = 4$?

16. Gegeben sind die Matrix A und der Vektor b :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & \mu \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ \lambda \\ -6 \end{pmatrix} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

- a) Für welche Werte von $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ besitzt $Ax = b$ eine eindeutige Lösung?
- b) Für welche Werte von $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ besitzt $Ax = b$ keine Lösung?

17. P 9 Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{R}$, für die das System

$$\begin{array}{rclcl} x & + & y & - & z & = & 2 \\ x & - & y & + & 3z & = & 4 \\ x & + & y & + & (a^2 - 5)z & = & a \end{array}$$

- a) keine Lösung,
- b) eine eindeutige Lösung besitzt.

18. Gegeben sind die Matrix A und der Vektor b :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -t^2 \\ -1 & 16 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ t \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad t \in \mathbb{R}$$

- a) Für welche Werte von $t \in \mathbb{R}$ besitzt $Ax = 0$ nur die triviale Lösung?
- b) Für welche Werte von $t \in \mathbb{R}$ ist $Ax = b$ lösbar?

19. Gegeben ist die Matrix A und der Vektor b :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -5 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- a) Berechnen Sie die Inverse der Matrix A und führen Sie eine Probe durch!
- b) Bestimmen Sie nun mit Hilfe der Inversen die eindeutige Lösung des Gleichungssystems $A \cdot x = b$!

Die mit P gekennzeichneten Beispiele sind von den Studierenden vorzubereiten und nach Aufruf durch die Lehrveranstaltungsleitung zu präsentieren!