Wirtschaftsmathematik - Übungen SS 2025

Blatt 3: Folgen und Reihen

1. Gegeben ist die Folge
$$a_n = \frac{5n}{n+1}$$
   a) Berechnen Sie die ersten vier Glieder dieser Folge, stellen Sie eine Vermutung über das Monotonieverhalten auf und beweisen Sie diese Vermutung!
   b) Zeigen Sie, dass 6 eine obere Schranke dieser Folge ist.
   c) Bestimmen Sie – wenn möglich – eine untere Schranke und begründen Sie Ihre Wahl. Was lässt sich dann über Beschränktheit und Konvergenz der Folge aussagen?

2. Gegeben ist die Folge
$$b_n = \frac{1-n}{n^2}$$
   a) Untersuchen Sie die angegebene Folge auf Monotonie.
   b) Geben Sie eine obere Schranke an und beweisen Sie Ihre Vermutung.
   c) Zeigen Sie, dass -1 eine untere Schranke dieser Folge ist.

3. P 21 Gegeben ist die Folge:
$$a_n = \frac{n}{n!}$$
   a) Untersuchen Sie die Folge auf Monotonie (Beweis!).
   b) Bestimmen Sie – wenn möglich – eine obere und eine untere Schranke und begründen Sie jeweils Ihre Wahl. Ist die Folge konvergent?

4. P 22 Zur Erschließung einer neuen Thermalquelle soll eine Probebohrung vorgenommen werden, wobei eine Tiefe von 230 m erreicht werden muss. Für die ersten 200 m wird ein Fixpreis in Höhe von € 100.000.- verrechnet. Der 201. Meter kostet € 600.- und jeder folgende Meter um € 400.- mehr als der vorhergehende.
   a) Berechnen Sie die Kosten für den 230. Meter.
   b) Berechnen Sie die Gesamtkosten der Probebohrung.

5. Gegeben ist eine geometrische Folge mit $q = 3$.
   a) Bestimmen Sie a_5, wenn $a_1 = \frac{1}{9}$ ist.
   b) Bestimmen Sie a_7, wenn $a_3 = 1$ ist.
   c) Berechnen Sie s_5, wenn $a_1 = \frac{1}{9}$ ist.
   d) Berechnen Sie a_1, wenn $s_3 = 117$ ist.

6. P 23 Vier Zahlen sind die ersten vier Glieder einer geometrischen Folge mit $q = 5$. Das Produkt aus der ersten und der vierten Zahl ergibt 6125. Wie groß ist die Summe der ersten 12 Zahlen dieser Folge, wenn $a_1 > 0$ gilt?

7. Bestimmen Sie die Grenzwerte:

$$a)\ \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 + 2n}{2n^2 + 1} \qquad b)\ \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n^2 + 3}{n + 2} - \frac{4n^2}{2n + 1} \right)$$

8. P 24 Bestimmen Sie mit Hilfe der Grenzwertrechenregeln den Grenzwert:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1 - 2n^2}{2n + 1} - \frac{2 - n - n^2}{n - 1} \right)$$

9. Gegeben ist die Folge

$$a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

   a) Geben Sie zur Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die zugehörige Reihe $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an, indem Sie die Partialsummen S_n berechnen.
   b) Geben Sie im Fall der Existenz den Grenzwert der S_n an.
   c) Schreiben Sie die Reihe unter Verwendung des Summenzeichens und berechnen Sie – sofern möglich – diese Summe.

10. P 25 Gegeben ist die geometrische Folge

$$\left\langle \frac{2}{27}, \frac{2}{9}, \frac{2}{3}, 2, \ldots \right\rangle$$

    a) Berechnen Sie a_{12}.
    b) Die Summe der ersten n Folgenglieder beträgt $\frac{1594322}{27}$. Berechnen Sie n.
    c) Berechnen Sie, wenn möglich, s_∞.

11. Prüfen Sie, ob die folgenden Reihen konvergieren. Wenn ja, was ist ihre Summe?

$$a)\ \sum_{i=2}^{\infty} 2^{2i+1} \cdot 7^{-i+1} \qquad\qquad b)\ \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{16}{9}\right)^{\frac{i}{2}}$$

12. P 26 Gegeben ist die folgende Reihe:

$$\sum_{i=1}^{\infty} (x+1)^i$$

a) Bestimmen Sie – wenn möglich – den Wert der Reihe für $x = -\frac{2}{3}$.

b) Für welches $x \in \mathbb{R}$ hat die Reihe den Wert 2?

13. Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die folgende geometrische Reihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{5^n}$$

Fertigen Sie für die folgenden Aufgaben jeweils eine graphische Darstellung der Zahlungsströme an und lösen Sie dann die Aufgaben. Geben Sie sämtliche Zwischenschritte zur Bestimmung der jeweiligen Lösung an. Das Anschreiben einer Formel alleine genügt nicht!

14. Herr K. verkauft eine Immobilie. Er kann zwischen drei Angeboten wählen:
Angebot A: € 10.000.- sofort,
Angebot B: € 13.000.- in sieben Jahren, d.h. zu $t = 7$,
Angebot C: Sieben Jahre lang, eine jeweils am Ende eines Jahres zu zahlende Rente in Höhe von € 1.900.-.
Vergleichen Sie die Angebote bei einem Zinssatz von 5 % p.a. Ermitteln Sie jeweils den Barwert und den Endwert.

15. Eine Firma plant in eine Maschine mit einer Nutzungsdauer von 5 Jahren zu investieren. Für die Maschine fallen am 1.1.2019 Anschaffungskosten in der Höhe von € 34.000.- und am 1.1.2022 Kosten für Wartungsarbeiten in der Höhe von € 27.000.- an. Der Restwert der Maschine nach 5 Jahren beträgt € 0.-. Auf der Einnahmenseite kalkuliert die Firma, dass jeweils am Jahresende (beginnend am 31.12.2019 bis zum 31.12.2023) Gewinne in der Höhe von € 15.000.- erwirtschaftet werden können.

a) Soll die Firma diese Investition tätigen, wenn sie mit einem kalkulatorischen Jahreszinssatz von $i = 0,1$ p.a. rechnet und nach dem Kapitalwertkriterium entscheidet?

b) Berechnen Sie den Kapitalwert K für das Investitionsprojekt, wenn das Unternehmen dieselben Kosten wie in a) kalkuliert, aber eine unendliche Nutzungsdauer unterstellt.

16. a) Wie hoch ist die jährliche (am Ende eines Jahres zu zahlende) Rückzahlungsrate eines zu $t = 0$ gewährten Kredits in der Höhe von € 100.000 bei einer Verzinsung von 10% p.a. und einer Laufzeit von 8 Jahren?

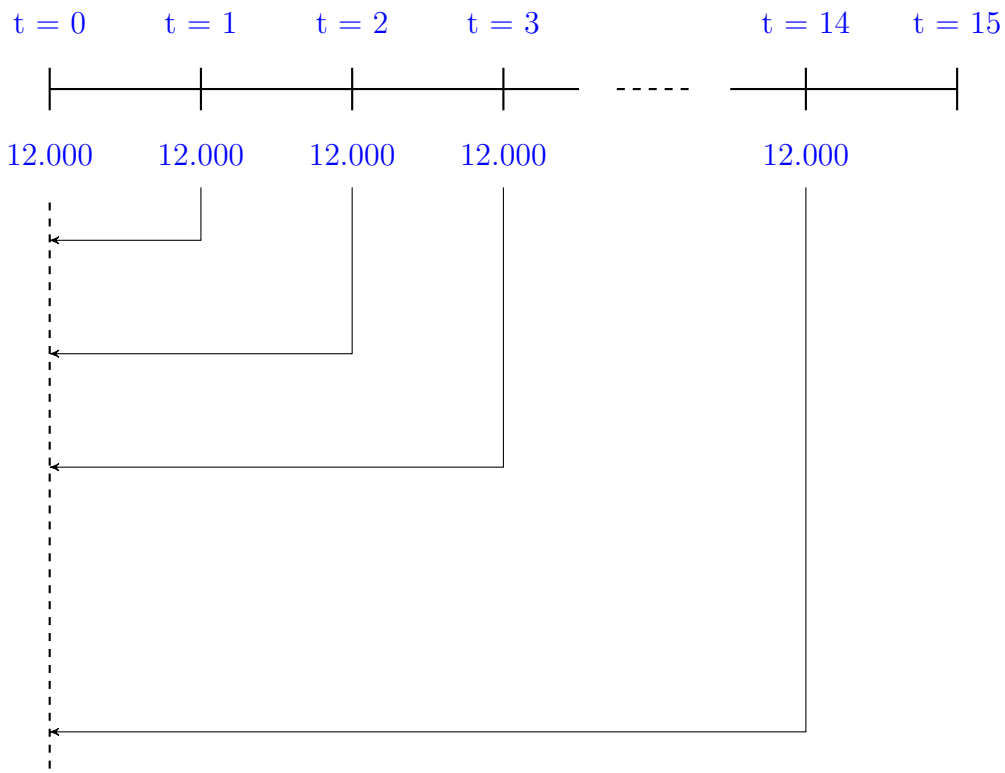
    b) Wie müsste die Laufzeit dieses Kredits verändert werden, damit die jährliche Rückzahlungsrate € 16.274, 539 beträgt?

17. P 27 Eine Rente von jährlich € 12.000.- wird bei einer Verzinsung von 4% p.a. für 15 Jahre jeweils am Jahresanfang ausbezahlt.

    a) Wie hoch sind der Barwert und der Endwert der Rente? Tragen Sie in nachstehende Zeitskala die Bewertung jeder eingezeichneten Zahlung zu $t = 0$ ein und berechnen Sie den Barwert mit Hilfe einer geeigneten Summenformel.

    b) Angenommen, es handelt sich um eine ewige Rente. Wie hoch ist ihr Barwert?

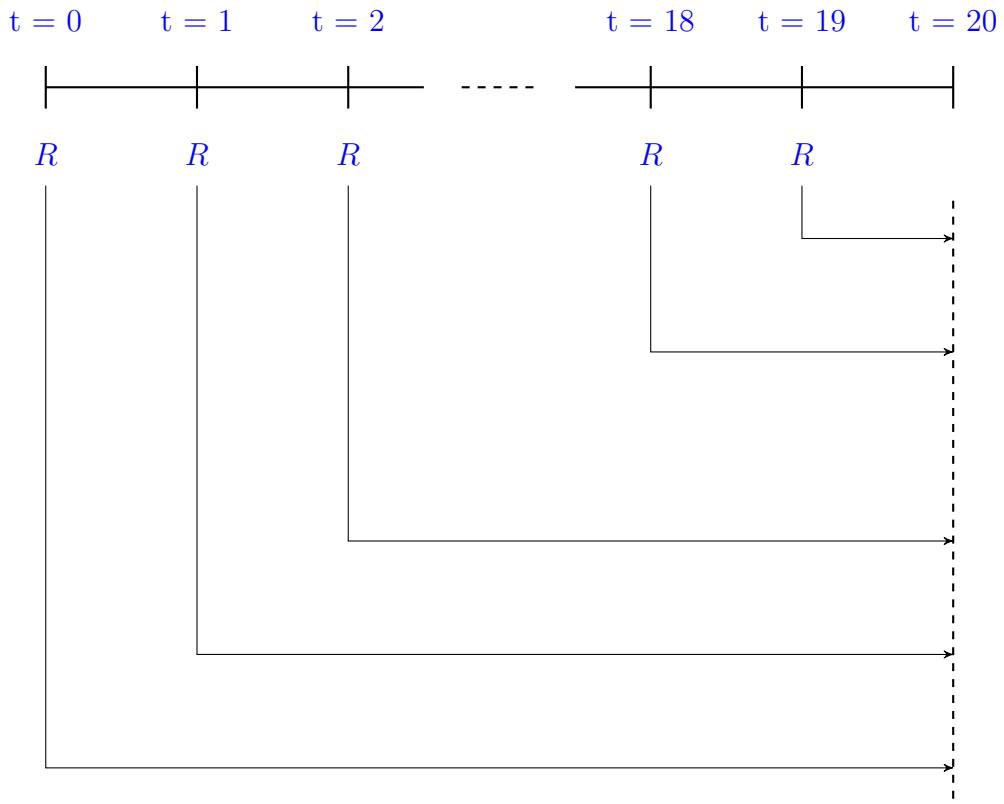
    c) Wieviele Jahre kann diese Rente ausbezahlt werden, damit ihr Barwert € 199.464, 959 beträgt?



18. P 28 Durch gleichbleibende Zahlungen am Beginn jeden Jahres soll nach 20 Jahren ein Kapital von € 300.000.- angespart werden.

a) Wie hoch muss die jährliche Zahlung sein, wenn $i = 5\ \%$ p.a. beträgt? Tragen Sie in nachstehende Zeitskala die Bewertung jeder eingezeichneten Zahlung zu $t = 20$ ein und lösen Sie die Aufgabe mit Hilfe einer geeigneten Summenformel.

b) Wie hoch muss die jährliche Zahlung sein, wenn im ersten Jahr $i = 5\ \%$ p.a., dann aber $i = 3\ \%$ p.a. beträgt?



19. a) Herr E. zahlt zwölfmal im Jahr einen Betrag in Höhe von € 1.000.- jeweils am Beginn jeden Monats auf ein Sparkonto ein, das mit $i = 3\,\%$ p. a. verzinst ist (Zinsverrechnung erfolgt am Sparkonto nur am Jahresende).

b) Frau L. zahlt viermal im Jahr einen Betrag in Höhe von € 1.000.- jeweils am Beginn jeden Quartals auf ein Girokonto ein, das mit $i = 4\,\%$ p. a. verzinst ist (Zinsverrechnung erfolgt bei diesem Girokonto am Ende jeden Quartals).

Welcher Betrag befindet sich am Ende des Jahres auf dem jeweiligen Konto? Hinweis: Für Zeiträume unter einem Jahr werden Zinsen linear verrechnet!

Die mit P gekennzeichneten Beispiele sind von den Studierenden vorzubereiten und nach Aufruf durch die Lehrveranstaltungsleitung zu präsentieren!