# Wirtschaftsmathematik - Übungen WS 2024

## Blatt 4: Funktionen von einer Variablen

1. Gegeben sind die Mengen

$$A = \{1, 2\} \quad \text{und} \quad B = \{1, 3, 5\}$$

sowie die Zuordnungsvorschrift $f : A \to B$, $y = f(x)$ mit

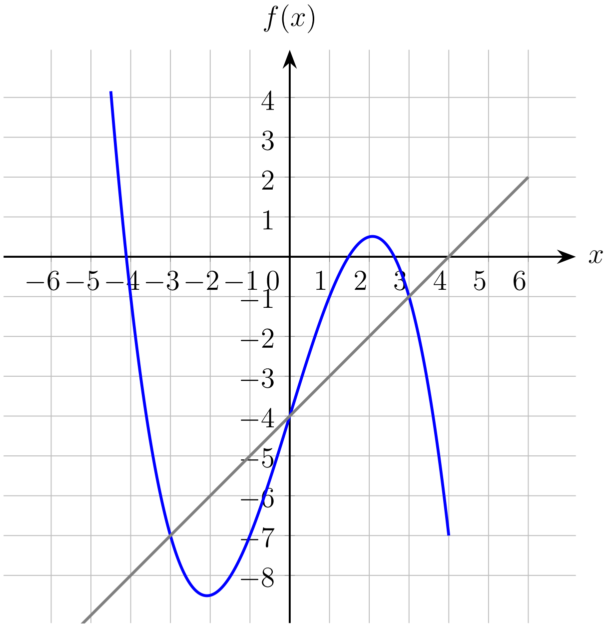
$$f(x) = 2x - 1$$

a) Skizzieren Sie diese Zuordnungsvorschrift in einem Pfeildiagramm und begründen Sie, warum durch die Vorschrift $f$ eine Funktion definiert ist!

b) Bestimmen Sie die Bildmenge der Funktion.

c) Ist die Funktion $f$ injektiv, surjektiv, bijektiv? Existiert eine Inverse zu $f$? Begründen Sie!

2. $\boxed{\text{P 29}}$ Im folgenden Graphen ist eine Funktion der Form $f(x) = \sum_{i=0}^{3} a_i x^i$ mit den reellen Parametern $a_i, i = 0\ldots3$ und eine Funktion der Form $g(x) = kx + d$ gegeben.




Lesen Sie die Antworten auf folgende Fragen direkt aus dem Graphen ab und begründen Sie kurz!

a) Bestimmen Sie $k$ und $d$.

b) Für welche $x$ gilt $f(x) = g(x)$?

c) Für welche $x$ gilt $g(x) \geq 0$?

d) Ist $f(-2) > g(-2)$?

e) Geben Sie die Gleichung einer Geraden $h$ an, die parallel zu $g$ verläuft und den Punkt $(0/1)$ enthält.

| | Antwort | Begründung |
|---|---|---|
| a) | | |
| b) | | |
| c) | | |
| d) | | |
| e) | | |

3. Für welche reellen Zahlen $x$ ist die folgende Funktion $f(x)$ definiert?

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x-2}$$

4. $\boxed{\text{P 30}}$ Gegeben sind die Funktionen

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 1-x \quad \text{und} \quad g: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{x}$$

Bilden Sie nun – wenn möglich – die Funktionen $h(x) = \left(\frac{f}{g}\right)(x)$ sowie $u(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$.

   a) Bestimmen Sie die größtmögliche Definitionsmenge von $h(x)$ und $u(x)$.

   b) Geben Sie die Bildmenge der Funktion $u(x)$ an.

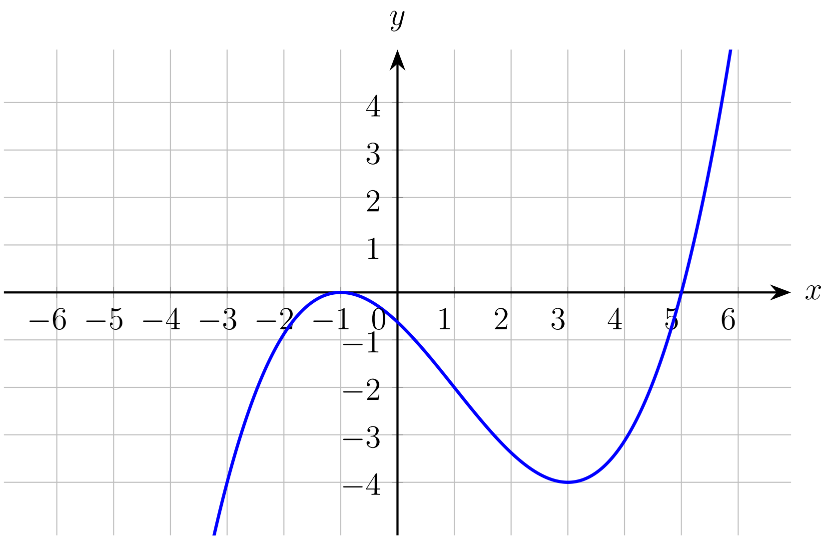
5. Gegeben ist die Funktion $f:\ [2;6] \to [3;5]\,,\ x \mapsto f(x)$ mit

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 2$$

   a) Skizzieren Sie diese Funktion in einem Koordinatensystem.

   b) Ist die Funktion $f$ bijektiv? Existiert eine Inverse zu $f$? Bestimmen Sie, wenn möglich, die Umkehrfunktion.

6. Die nachfolgende Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion. Skizzieren Sie die erste und zweite Ableitung dieser Funktion!



7. Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \left(\frac{3}{2}x + 3\right) \cdot e^{-\frac{x}{2}}$$

Diskutieren Sie diese Funktion, d.h. bestimmen Sie die größtmögliche Definitionsmenge, Nullstellen, Extremstellen, Wendepunkte, Monotonie, das Krümmungsverhalten und das Verhalten im Unendlichen. Skizzieren Sie den Graphen!

8. P 31 Gegeben ist die Funktion

$$f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \ln\left(\frac{3}{x+1}\right)$$

   a) Für welche reellen Zahlen $x$ ist die Funktion $f(x)$ definiert?
   b) Bestimmen Sie die erste Ableitung der Funktion $f$. Welche Regeln haben Sie verwendet?

9. P 32 Gegeben ist die Funktion

$$f : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ \text{ mit } \quad f(x) = x \cdot e^x$$

Für welche $x \in D$ ist die Funktion $f$ streng monoton steigend?

10. P 33 Gegeben ist die Funktion

$$f : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ \text{ mit } \quad f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^3 - 9x^2 + 8$$

Für welche $x \in D$ ist die Funktion $f$ konvex?

11. Bestimmen Sie die Grenzwerte:

$$a) \ \lim_{x \to 1} \frac{x-1}{2x^2 - 2x} \qquad b) \ \lim_{x \to \infty} \left(\frac{3}{2}x + 3\right) \cdot e^{-\frac{x}{2}}$$

12. P 34 Bestimmen Sie den Grenzwert:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - x^2}$$

13. Gegeben ist die Funktion

$$f : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ \text{ mit } \quad f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 8$$

Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente im Wendepunkt der Funktion $f$.

14. Berechnen Sie sämtliche Stammfunktionen für:

$$a)\ f(x) = 6x^2 - x + x^{\frac{3}{2}} \qquad b)\ f(x) = \frac{(x+1)^2}{\sqrt[3]{x}}$$

Verifizieren Sie Ihre Lösung!

15. $\boxed{\text{P 35}}$ Bestimmen Sie alle Funktionen, deren zweite Ableitung $f''(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{5}{3}\sqrt[3]{x^2}$ ist!

16. Bestimmen Sie:

$$a)\ \int \frac{3}{\sqrt{4x+1}}\,dx \qquad b)\ \int 3x \cdot e^{x^2+1}\,dx$$

17. $\boxed{\text{P 36}}$ Bestimmen Sie:

$$\int 3x \cdot e^{x^2-4}\,dx$$

18. a) Berechnen Sie den Wert des folgenden bestimmten Integrals.

$$\int_0^5 \left(4 - \frac{1}{4}x^2\right) dx$$

b) Skizzieren Sie den Integranden in einem geeigneten Koordinatensystem. Entspricht der Wert des in a) berechneten bestimmten Integrals dem Flächeninhalt, den die Funktion $f(x) = 4 - \frac{1}{4}x^2$ mit der $x$-Achse im Intervall $[0; 5]$ einschließt?

19. $\boxed{\text{P 37}}$ Gegeben ist die Funktion $f(x) = -x^3 + 1$. Skizzieren Sie die Funktion und berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die die Funktion $f$ mit der $x$-Achse im Intervall $[-1; 2]$ einschließt?

20. Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mit:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 1 \\ 2 - x & x > 1 \end{cases}$$

a) Skizzieren Sie die Funktion in einem geeigneten Koordinatensystem und überprüfen Sie graphisch, ob die Funktion über ganz $\mathbb{R}$ stetig ist.

b) Existiert die Ableitung $f'(x)$ an der Stelle $x = 1$? Begründen Sie!

c) Wie groß ist die Fläche, die die Funktion $f$ und die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mit $g(x) = 1$ im Intervall $[0; 1]$ einschließen?

21. In einem Land gilt folgende Form einer progressiven Einkommensteuer:

| **Für Einkommensteile** | **Steuersatz** |
|---|---:|
| 0 bis einschließlich 1000.- jährlich | 0% |
| über 1000.- bis einschließlich 6000.- jährlich | 10% |
| über 6000.- jährlich | 20% |

a) Erstellen Sie eine stückweise lineare Funktion $T(x)$, die die Höhe der abzuführenden Steuer in Abhängigkeit von der Höhe des Einkommens beschreibt und skizzieren Sie deren Graphen.

b) Bestimmen Sie die zu entrichtende Einkommensteuer für ein Einkommen der Höhe 3500.-

22. Die Kostenfunktion eines Betriebes kann annähernd durch eine quadratische Funktion $K(x) = ax^2 + bx + c$ dargestellt werden. Eine Produktion von 4 Mengeneinheiten (ME) führt zu Gesamtkosten von 29 Geldeinheiten (GE) und eine Produktion von 2 ME erfordert 13 GE. Die Grenzkosten bei einer Produktion von 2 ME betragen 6 GE. Der Marktpreis, zu dem verkauft werden kann, ist $p = 8$ GE/ME.

a) Ermitteln Sie die Kostenfunktion.

b) Ermitteln Sie die Gewinnfunktion.

c) Für welche Produktionsmengen arbeitet das Unternehmen mit einem Gewinn?

d) Für welche Produktionsmenge wird der Gewinn maximal? Ermitteln Sie den maximalen Gewinn.

23. P 38 In einer Marktanalyse eines Schokoladenproduzenten wurde festgestellt, dass sich bei einem Preis von € 2,50 pro 100 g Tafel in einer bestimmten Region täglich 200 Stück absetzen lassen. Nach einer Preissenkung auf € 2,00 lassen sich täglich 300 Stück absetzen. Der Höchstpreis liegt bei € 3,20. Es soll der Zusammenhang zwischen dem Preis $p$ in Euro und der nachgefragten Menge $x$ in Stück durch eine quadratische Funktion
$p(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ dargestellt werden.

a) Stellen Sie die Gleichung der Preis-Absatz-Funktion auf.

b) Berechnen Sie die Sättigungsmenge (Runden Sie auf ganze Stück).

c) In welchem Bereich stellt die Funktion ein sinnvolles Modell für diesen Zusammenhang dar?

24. Die Grenzkostenfunktion eines Betriebes kann annähernd durch die Funktion

$$K'(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x + 4$$

dargestellt werden. Bei Stillstand der Produktion betragen die Gesamtkosten 3 GE. Die Preis-Absatz-Funktion des Betriebes lässt sich durch

$$p(x) = -\frac{x^2}{9} - \frac{2}{3}x + 8$$

beschreiben.

a) Skizzieren Sie die Preis-Absatz-Funktion und bestimmen Sie Höchstpreis und Sättigungsmenge. Achten Sie in der Skizze auf einen ökonomisch sinnvollen Definitionsbereich!

b) Bestimmen Sie die Kostenfunktion $K(x)$, sowie die Erlösfunktion $E(x)$.

c) Ermitteln Sie die gewinnmaximale Ausbringungsmenge. Zeigen Sie, dass es sich tatsächlich um ein Maximum handelt.

d) In welchem Bereich arbeitet der Betrieb mit degressiven Kosten?

25. P 39 Eine Grenzkostenfunktion ist gegeben durch $K'(x) = 3x^2 - \frac{x}{2} + 2$.

a) Bestimmen Sie die Kostenfunktion, wenn für eine Produktion von zwei Einheiten Gesamtkosten in Höhe von 31 anfallen!

b) Das Produkt wird zu einem konstanten Preis von $p = \frac{55}{2}$ abgesetzt. Bestimmen Sie die Gewinnfunktion, die gewinnmaximale Ausbringungsmenge und den Maximalgewinn!

26. Eine Nachfragefunktion ist gegeben durch: $N : D \to \mathbb{R}$, $p \mapsto N(p)$ mit

$$N(p) = \begin{cases} 10 - p & \text{für} \quad p \leq 4 \\ 12 - \frac{3}{2}p & \text{für} \quad p > 4 \end{cases}$$

a) Geben Sie einen ökonomisch sinnvollen Definitionsbereich dieser Nachfragefunktion an und skizzieren Sie den Funktionsgraphen in einem geeigneten Koordinatensystem.

b) Überprüfen Sie graphisch, ob $N$ an der Stelle $p = 4$ stetig ist!

c) Bestimmen Sie zum Preis $p = 6$ die Preiselastizität der Nachfrage und interpretieren Sie den erhaltenen Wert.

27. $\boxed{\text{P 40}}$ Eine Nachfragefunktion ist gegeben durch: $n:\ D \to \mathbb{R},\ p \mapsto n(p)$ mit

$$n\left(p\right) = 20 - \frac{p^2}{25}$$

Um wie viel Prozent ändert sich die Nachfrage näherungsweise, wenn $p$ ausgehend von $p = 5$ EUR um 1% erhöht wird?

Die mit $\boxed{\text{P}}$ gekennzeichneten Beispiele sind von den Studierenden vorzubereiten und nach Aufruf durch den/die Lehrveranstaltungsleiter/in an der Tafel zu präsentieren!