

Wirtschaftsmathematik - Übungen WS 2024

Blatt 3: Folgen und Reihen

1. Gegeben ist die Folge

$$a_n = \frac{6n}{2n-1}$$

- Berechnen Sie die ersten vier Glieder dieser Folge, stellen Sie eine Vermutung über das Monotonieverhalten auf und beweisen Sie diese Vermutung!
- Zeigen Sie, dass 2 eine untere Schranke dieser Folge ist.
- Bestimmen Sie – wenn möglich – eine obere Schranke und begründen Sie Ihre Wahl. Was lässt sich dann über Beschränktheit und Konvergenz der Folge aussagen?

2. Untersuchen Sie die durch ihr Bildungsgesetz angegebene Folge auf Monotonie, Beschränktheit und Konvergenz:

$$b_n = -n^2 + 8n - 6$$

3. **P 21** Von einer Folge sind die ersten drei Glieder gegeben:

$$\left\langle \frac{2}{3}; 1; \frac{6}{5}; \dots \right\rangle$$

- Geben Sie ein Bildungsgesetz dieser Folge in expliziter Darstellung an.
- Untersuchen Sie die Folge auf Monotonie (Beweis!).
- Geben Sie eine obere und eine untere Schranke der Folge an (Beweis!).
- Was können Sie über die Konvergenz der Folge aussagen?

4. **P 22** Ein Unternehmen produziert vegane Fertiggerichte und plant eine konstante Erhöhung der Produktion über die kommenden Quartale hinweg. Zu Beginn des ersten Quartals (in der ersten Woche) werden 1000 Einheiten hergestellt. Es ist geplant, die Produktion jede Woche um eine konstante Anzahl von 50 Einheiten zu steigern, um der steigenden Nachfrage gerecht zu werden.
- Geben Sie das Bildungsgesetz für die wöchentliche Produktionsmenge an Fertiggerichten an.
 - Berechnen Sie die geplante Produktionsmenge in der 6. Woche des Quartals.
 - Ermitteln Sie die Gesamtzahl der in den ersten sechs Wochen produzierten Fertiggerichte.
 - Das Unternehmen möchte die Produktion von Woche 7 bis einschließlich Woche 9 pausieren, um Wartungsarbeiten durchzuführen, und anschließend die Steigerung fortsetzen. Wie hoch ist dann die in den ersten beiden Quartalen produzierte Gesamtmenge, wenn ein Quartal insgesamt 13 Wochen hat?

5. Gegeben ist die Folge

$$a_n = 16 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$

- Zeigen Sie $\forall n \in \mathbb{N}$, dass es sich um eine geometrische Folge handelt!
 - Bestimmen Sie a_1 und a_5 .
 - Bestimmen Sie s_5 .
6. **P 23** In einer geometrischen Folge mit $q > 1$ beträgt die Summe der ersten drei Glieder 42. Ihr Produkt ist 512. Berechnen Sie s_4 .

7. Bestimmen Sie die Grenzwerte:

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n - 5n^2}{3n^2 + 2} \qquad b) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{8n^2 + 1}{2n - 2} - \frac{4n^2 + 5n}{n + 3} \right)$$

8. **P 24** Bestimmen Sie mit Hilfe der Grenzwertrechenregeln den Grenzwert:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{2n^2 + 1}{2n + 3} - \frac{3n^2 + 5}{3n} \right]$$

9. Gegeben ist die Folge

$$a_n = \frac{1}{2^n}$$

- Geben Sie zur Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die zugehörige Reihe $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ an, indem Sie die Partialsummen S_n berechnen.
- Geben Sie im Fall der Existenz den Grenzwert der zugehörigen Reihe an!
- Schreiben Sie die Reihe unter Verwendung des Summenzeichens und berechnen Sie – sofern möglich – diese Summe.

10. **P 25** Gegeben ist die Folge $a_n = \langle 25, 10, 4, \dots \rangle$
- Untersuchen Sie, ob die Glieder einer geometrischen Folge angehören können und geben Sie ein mögliches Bildungsgesetz an.
 - Geben Sie eine Formel für die Partialsummen S_n an und berechnen Sie mit Hilfe dieser Formel: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
11. Prüfen Sie, ob die folgenden Reihen konvergieren. Wenn ja, was ist ihre Summe?

$$a) 7 \cdot \sum_{n=2}^{\infty} 2^n \cdot 3^{2-2n}$$

$$b) \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{9^i}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$$

12. **P 26** Prüfen Sie, ob die folgende Reihe konvergiert. Wenn ja, was ist ihre Summe?

$$3 \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{3^{6i}}{1000^i}\right)^{\frac{1}{3}}$$

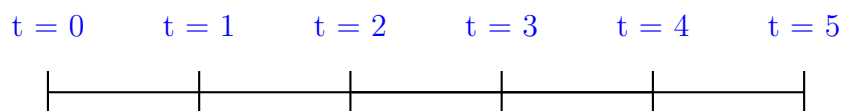
13. Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die folgende geometrische Reihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{5^n}$$

Fertigen Sie für die folgenden Aufgaben jeweils eine graphische Darstellung der Zahlungsströme an und lösen Sie dann die Aufgaben. Geben Sie sämtliche Zwischenschritte zur Bestimmung der jeweiligen Lösung an. Das Anschreiben einer Formel alleine genügt nicht!

14. Frau R. verkauft eine Immobilie. Sie kann zwischen zwei Angeboten wählen:
- Angebot A: € 20.200.- sofort,
- Angebot B: € 20.606,02.- in drei Jahren, d.h. zu $t = 3$.
- Vergleichen Sie die Angebote bei einem Zinssatz von 1 % p.a.. Ermitteln Sie jeweils den Barwert und den Endwert.

15. Eine Firma plant in eine Maschine mit einer Nutzungsdauer von 5 Jahren zu investieren. Für die Maschine fallen zu $t = 0$ Anschaffungskosten in der Höhe von € 40.000.- an. Nach fünf Jahren (d.h. zu $t = 5$) kann die Maschine zu einem Restwert in Höhe von € 2.000.- verkauft werden. Durch Produktion und Verkauf generiert die Firma, fünf Jahre lang, jeweils am Jahresende (beginnend zu $t = 1$), einen Gewinn in der Höhe von € 10.000.-.
- Soll die Firma diese Investition tätigen, wenn sie mit einem kalkulatorischen Jahreszinssatz von $i = 0,05$ p.a. rechnet und nach dem Kapitalwertkriterium entscheidet? Hinweis: Verwenden Sie Bruchschreibweise!
 - Berechnen Sie den Kapitalwert K für das Investitionsprojekt, wenn das Unternehmen mit Anschaffungskosten in der Höhe von € 40.000.- kalkuliert, aber eine unendliche Nutzungsdauer und einen Restwert von € 0.- unterstellt.
16. **P 27** Ein Investor besitzt eine Anleihe mit einer Restlaufzeit von fünf Jahren und überlegt sich folgende Anlagemöglichkeiten:
- A: er verkauft die Anleihe um € 11.300.- sofort ($t = 0$) und legt das Geld auf ein Konto, wobei dort die ersten drei Jahre mit 1,0 % und die folgenden zwei Jahre mit 3,0 % verzinst sind.
- B: er behält die Anleihe bis zum Ende der Laufzeit. Dafür bekommt er jährlich am 31.12. Zinszahlungen in der Höhe von € 400,-. Am Ende der Laufzeit wird die Anleihe mit € 10.000,- getilgt. Die jährlichen Zinszahlungen legt er auf ein Konto, das mit 1 % p.a. verzinst wird.
- Für welche Variante sollte sich der Investor entscheiden?
 - Wie hoch müssten die jährlichen Zinszahlungen in der zweiten Variante sein, damit die beiden Varianten gleichwertig sind?



17. Frau A. zahlt zu Beginn jeden Jahres, zehn Jahre lang, einen Geldbetrag R in einen Aktienfonds ein, um am Ende des zehnten Jahres einen Wintergarten im Wert von € 20.000.- finanzieren zu können. Wie hoch muss der Geldbetrag sein, wenn die Verzinsung jährlich 7 % beträgt?
18. Herr E. zahlt zweimal im Jahr einen Betrag in Höhe von € 10.000.- jeweils am Beginn jeden Semesters auf
- ein Sparkonto ein, das mit $i = 4$ % p. a. verzinst ist (Zinsverrechnung erfolgt am Sparkonto nur am Jahresende).
 - ein Girokonto ein, das mit $i = 4$ % p. a. verzinst ist (Zinsverrechnung soll bei diesem Girokonto jeweils am Ende jeden Semesters erfolgen).
- Welcher Betrag befindet sich am Ende des Jahres auf dem jeweiligen Konto, wenn sich am Anfang des Jahres bereits € 20.000.- darauf befinden? Hinweis: Für Zeiträume unter einem Jahr werden Zinsen linear verrechnet!

19. **P 28** Herr L. zahlt viermal im Jahr einen Betrag in Höhe von € 900.- jeweils am Beginn jeden Quartals auf
- a) ein Sparkonto ein, das mit $i = p \%$ p. a. verzinst ist (Zinsverrechnung erfolgt am Sparkonto nur am Jahresende).
 - b) ein Girokonto ein, das mit $i = p \%$ p. a. verzinst ist (Zinsverrechnung soll bei diesem Girokonto jeweils am Ende jeden Quartals erfolgen).

Welcher Betrag befindet sich am Ende des Jahres auf dem jeweiligen Konto? Verwenden Sie für den Zinssatz den aktuellen 12-Monats-Euribor minus 100 Basispunkte.

(z. B.: <https://www.euribor-rates.eu/de/>)

Die mit **P** gekennzeichneten Beispiele sind von den Studierenden vorzubereiten und nach Aufruf durch den/die Lehrveranstaltungsleiter/in zu präsentieren!