Wirtschaftsmathematik - Übungen WS 2024

Blatt 2: Mathematische Grundlagen

1. Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke:

   a) $\left(\frac{2x^{n+1}}{y^{n+2}}\right)^2 : \frac{\left(x^{3n+1}\right)^2}{3x^{10n}\cdot y^4} =$

   b) $\frac{3x^{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt[3]{x^{-4}}}{\sqrt{9x}} =$

2. $\boxed{\text{P 10}}$ Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke soweit möglich:

$$\text{a)}\left[\left(\frac{-5x^3}{2a^4}\right)^{-2} : \left(\frac{4a}{15x^2}\right)^2\right]\cdot\left(\frac{2x^2}{a^3}\right)^3 = \qquad \text{b)}\sqrt{\frac{x^2y^{-5}}{\left(x^2\right)^2\left(xy\right)^{-3}x^{-5}y^2}}$$

3. Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke:

   a) $\frac{6!}{4!2!}$

   b) $\frac{n!}{(n-2)!}$

4. Stellen Sie den folgenden Term als Logarithmus eines Terms dar:

$$\frac{1}{3}\cdot\log_b(x+2) - 2\cdot\log_b(x-1) - 3\cdot\log_b(x)$$

5. $\boxed{\text{P 11}}$ Vereinfachen Sie soweit möglich:

$$-\frac{2}{3}\cdot\log_3(27) + 2^{5\cdot\log_2\left(\frac{1}{2}\right)} + \sqrt{\log_5 5} =$$

6. Berechnen Sie:

$$a)\ \frac{1}{3}\cdot\sum_{i=1}^{3}(3i-1)^2 - 30 = \qquad b)\ \sum_{i=1}^{n} i - \sum_{i=1}^{n+1} i =$$

7. Berechnen Sie die folgende Doppelsumme:

$$\sum_{k=1}^{2}\sum_{j=0}^{3}\frac{j^2}{k} =$$

8. $\boxed{\text{P 12}}$ Berechnen bzw. vereinfachen Sie die folgende Summe (Doppelsumme) soweit möglich:

$$\frac{6!}{5! \cdot 2!} \cdot \sum_{i=2}^{3} \sum_{j=1}^{4} \frac{(-1)^{i}}{5} \cdot i^2 \cdot j$$

9. Bestimmen Sie jeweils die Definitionsmenge der folgenden Gleichungen, lösen Sie die Gleichungen nach der Variablen x auf und geben Sie die Lösungsmenge an:
   a) $\sqrt{x+4} + \sqrt{x-20} = 6$
   b) $3^{x-2} \cdot 27^x = 9^3$
   c) $\log_2(3x+11) - \log_2(2x-1) = 2$
   d) $(x-1)\left(x^3-64\right) \cdot \sqrt{x-3} = 0$

10. $\boxed{\text{P 13}}$ Bestimmen Sie die Definitionsmenge $D \subset \mathbb{R}$ der folgenden Gleichung und geben Sie die Lösungsmenge an.

$$\frac{10x}{4x^2-9} - \frac{x+1}{2x-3} = \frac{3x-4}{2x+3}$$

11. $\boxed{\text{P 14}}$ Bestimmen Sie die größtmögliche Definitionsmenge $D \subseteq \mathbb{R}$ der folgenden Gleichung, lösen Sie die Gleichung nach der Variablen x auf und geben Sie die Lösungsmenge an.

$$\frac{1}{2} \cdot 4^{5x+2} = \sqrt{4^{-2x}}$$

12. Lösen Sie die folgende Ungleichung und geben Sie die Lösungsmenge über $\mathbb{R}$ an:
    a) $|2x-12| \geq x+3$
    b) $\dfrac{5x+1}{x+1} > 4$
    c) $\dfrac{x^2+3x}{x^2+6} < 1$
    d) $3x^2 - 3x < 18$
    e) $3x^2 \geq 27$

13. $\boxed{\text{P 15}}$ Lösen Sie die folgende Betragsungleichung in $\mathbb{R}$:

$$\left|\left|x^2+4\right| - 4\right| < x^2 + 2x - 12$$

14. $\boxed{\text{P 16}}$ Geben Sie die Lösungsmenge der folgenden Ungleichung über $\mathbb{R}$ an:

$$\frac{2x-1}{x-2} \leq 2$$

15. $\boxed{\text{P 17}}$ Geben Sie die Lösungsmenge der folgenden Ungleichung über $\mathbb{R}$ an:

$$x \cdot (x+4) \leq 7x + 4$$

16. Skizzieren Sie ein Venn-Diagramm mit zwei Mengen – beide Teilmengen einer Grundmenge G – *im allgemeinsten Fall* und kennzeichnen Sie folgende Menge:

$$(A \setminus B) \cup \left(\overline{A} \cap B\right)$$

17. Die Menge $\Omega = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ hat die Teilmengen $A = \{1,3,5,7\}$, $B = \{2,5,6,8\}$ und $C = \{5,6,7,8,9\}$. Erstellen Sie ein Venn-Diagramm und bestimmen Sie die folgenden Mengen:

   a)

$i)\ A \cap B$	$ii)\ A \cup C$	$iii)\ A \setminus C$
$iv)\ \bar{A}$	$v)\ A \cap \overline{B}$	$vi)\ \left(\bar{A} \cup B\right) \setminus B$

   b) Setzen Sie das passende Zeichen ein: $\subset$, $\not\subset$,$\in$, $\notin$ oder $=$
      i. $7 \ldots C$
      ii. $\{1\} \ldots A$

18. $\boxed{\text{P 18}}$ Die Menge $\Omega = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ hat die Teilmengen $A = \{y \in \Omega \mid y \text{ ist ein Vielfaches von } 3\}$ und $B = \{x \in \Omega \mid x = 2n \wedge n \in \mathbb{N}\}$.
   a) Bestimmen Sie die Mengen $C = A \cup (B \setminus A)$, $D = \overline{C} \cap B = C_\Omega(C) \cap B$ und $E = C \setminus B$.
   b) Erstellen Sie ein Venn-Diagramm mit Grundmenge Ω und kennzeichnen Sie die Mengen A, B, C, D und E.
   c) Berechnen Sie $|\mathcal{P}(B)|$. ($\mathcal{P}(B) \ldots$ Potenzmenge der Menge B)

19. Im Wintersemester 2023 besuchten von 600 BWL-Studierenden 260 die Wirtschaftsmathematik Vorlesung, 530 die Wirtschaftsmathematik Übung und 100 das Wirtschaftsmathematik Tutorium. 80 besuchten sowohl die Wirtschaftsmathematik Übung als auch das Wirtschaftsmathematik Tutorium. 10 besuchten nur das Tutorium. 30 Studierende besuchten alle drei Veranstaltungen und 30 keine davon.
   a) Erstellen Sie ein Venn Diagramm des Sachverhaltes samt den Mächtigkeiten aller Teilmengen.
   b) Wie viele Studierende besuchten die Wirtschaftsmathematik Vorlesung und die Wirtschaftsmathematik Übung, aber nicht das Wirtschaftsmathematik Tutorium?
   c) Wie viele Studierende besuchten nur die Wirtschaftsmathematik Übung?
   d) Wie viele Studierende besuchten mindestens zwei Veranstaltungen?

20. $\boxed{\text{P 19}}$ In einem Unternehmen gibt es eine Abteilung mit 35 Mitarbeitern. Einige von ihnen arbeiten in den drei Bereichen Produktentwicklung, Marketing und Marktanalyse. In der letzten Arbeitswoche wurden die Mitarbeiter gebeten, ihre Arbeit anhand bestimmter Kriterien zu kategorisieren. Die Ergebnisse wurden wie folgt festgehalten:

    15 Mitarbeiter haben an der Produktentwicklung gearbeitet, 10 Mitarbeiter waren im Bereich Marketing tätig und 18 Mitarbeiter haben Marktanalysen durchgeführt. Kein Mitarbeiter war gleichzeitig in der Produktentwicklung und im Marketing tätig. 4 Mitarbeiter haben sowohl an der Produktentwicklung als auch an der Marktanalyse mitgewirkt. 6 Mitarbeiter haben sowohl im Marketing als auch an Marktanalysen gearbeitet.

    a) Erstellen Sie ein Venn Diagramm des Sachverhaltes samt den Mächtigkeiten aller Teilmengen.
    b) Ermitteln Sie, wie viele Mitarbeiter ausschließlich in der Produktentwicklung gearbeitet haben.
    c) Geben Sie an, wie viele Mitarbeiter der Abteilung in keinem der drei Bereiche gearbeitet haben.
    d) Wie viele Mitarbeiter waren in mindestens zwei der drei Bereiche eingesetzt?

21. Gegeben sind die folgenden Mengen:

$$M_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x < 3\} \qquad M_2 = [0;5] \qquad M_3 = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 < x \leq 7\}$$

    a) Skizzieren Sie diese Mengen auf je einer Zahlengeraden der reellen Zahlen
    b) Bestimmen Sie den Durchschnitt $\bigcap_{i=1}^{3} M_i$ aller drei Mengen!
    c) Bestimmen Sie die Vereinigung $\bigcup_{i=1}^{3} M_i$ aller drei Mengen!
    d) Bestimmen Sie die Komplementmenge von M_1 bezüglich $\mathbb{R}$!
    e) Bestimmen Sie $M_1 \triangle M_2$.
    f) Geben Sie die Potenzmenge der Menge $(M_3 \setminus M_2)$ an und bestimmen Sie $|(M_3 \setminus M_2)|$ sowie $|\mathcal{P}(M_3 \setminus M_2)|$!

22. Gegeben sind die folgenden Mengen:

$$A = \{2, 4\} \qquad B = \mathbb{Z} \cap \left[\frac{1}{e}; 3\right]$$

    Bestimmen Sie das kartesische Produkt $A \times B$ und skizzieren Sie diese Menge in einem geeigneten Koordinatensystem.

23. Skizzieren Sie die folgende Menge in $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Ist diese Menge konvex? (Hinweis: Eine Menge heißt konvex, wenn sie zu je zwei beliebigen Punkten auch deren ganze Verbindungsstrecke enthält.)

$$A = \left\{(x, y) \in R^2 \;\middle|\; (x+1)^2 + (y-2)^2 \leq 9 \wedge |x| \leq 1 \wedge y > 0\right\}$$

24. Gegeben sind die folgenden Mengen:

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|(x \geq 0) \wedge (y < 0) \wedge (x - y < 2)\right\}$$

$$B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|(x \geq 0) \wedge (y \geq 0) \wedge \left(y \leq 4 - x^2\right)\right\}$$

Kennzeichnen Sie Menge $A \cup B$ in einem geeigneten Koordinatensystem. Ist diese Menge konvex?

25. $\boxed{\text{P 20}}$ Gegeben sind die drei Mengen

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq 9\}\,;\; B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \frac{1}{2}x^2 + y \leq 2\right\}\,;\; C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y \geq |x|\}.$$

a) Skizzieren Sie die drei Mengen in einem geeigneten Koordinatensystem.
b) Kennzeichnen Sie in Ihrer Skizze die Menge $A \cap B \cap C$. Ist diese Menge konvex?

Die mit P gekennzeichneten Beispiele sind von den Studierenden vorzubereiten und nach Aufruf durch den/die Lehrveranstaltungsleiter/in zu präsentieren!