Wirtschaftsmathematik - Übungen WS 2024

Blatt 1: Lineare Algebra

1. Gegeben ist eine 4×3 Matrix $A = (a_{ij})$ mit

$$a_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{4} \cdot 2^{i+j} & \text{für} \quad i < j \\ (-1)^j \cdot i & \text{für} \quad i = j \\ i + j & \text{sonst} \end{cases}$$

eine Matrix $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, ein Zeilenvektor $u = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ sowie ein Spaltenvektor $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

   a) Schreiben Sie die Matrix A an!
   b) Berechnen Sie $u \cdot v$.
   c) Berechnen Sie – wenn möglich: $A \cdot B^T$ und $B^T \cdot A$.

2. $\boxed{\text{P 1}}$ Gegeben sind zwei Matrizen und zwei Vektoren:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad x^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

   Berechnen Sie – wenn möglich:

   a) $A + B, \quad A \cdot B, \quad A \cdot B^T$
   b) $y^T \cdot x^T, \quad A \cdot x + y$

3. $\boxed{\text{P 2}}$ Was versteht man unter einer unteren Dreiecksmatrix? Zeigen Sie nun mit Hilfe von zwei allgemeinen unteren Dreiecksmatrizen der Dimension 2×2, dass deren Produkt wieder eine untere Dreiecksmatrix ergibt.

4. Gegeben sind die regulären (invertierbaren) $n \times n$-Matrizen A, B, C und X. E ist eine Einheitsmatrix der Dimension $n \times n$. Lösen Sie die folgenden Matrizengleichungen nach der Matrix X auf. Welche Bedingung muss dabei noch gelten?

   a) $A \cdot (B + X \cdot C) = C$
   b) $\left(A \cdot X^T\right)^T - X \cdot B + 3C = E$

5. $\boxed{\text{P 3}}$ A, B, C und X sind reguläre (invertierbare) $n \times n$-Matrizen. Bestimmen Sie die Lösungsmatrix X der folgenden Matrizengleichung:

$$X^{-1} \cdot (A + B) = C + \left(A^{-1} \cdot X\right)^{-1}$$

6. In einem Staat gibt es nur zwei Parteien, D und R. Langfristige Beobachtungen des Wahlverhaltens der wahlberechtigten Personen bei einer Wahl haben ergeben, dass 70 % der Wählerinnen und Wähler von Partei D und 80 % der Wählerinnen und Wähler von Partei R ihrer Partei treu bleiben. Die Wählenden von Partei D wechseln zu 30 % zur Partei R, während sich umgekehrt 20 % der Wählenden von Partei R bei der folgenden Wahl für die Partei D entscheiden. Bei der letzten Wahl erhielt die Partei D 60 % und Partei R 40 % aller Stimmen.
   a) Geben Sie die zugehörige Übergangsmatrix an.
   b) Bestimmen Sie mit Hilfe dieser Matrix die zu erwartende Stimmenverteilung nach der nächsten Wahl.
   c) Wie viele der Wählerinnen und Wähler der Partei R müssen ihrer Partei treu bleiben, wenn die Partei R bei der nächsten Wahl ihren jetzigen Stimmenanteil auf 54 % steigern möchte und die Wählerinnen und Wähler der Partei D ihr Wahlverhalten beibehalten?
   d) Wie war die Stimmverteilung vor der letzten Wahl, wenn man annimmt, dass die Übergangsmatrix aus a) auch für die Vorperiode gegolten hat?

   Hinweis: Für die Inverse einer $2 \times 2-$Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ gilt: $A^{-1} = \dfrac{1}{a \cdot d - b \cdot c} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

7. $\boxed{\text{P 4}}$ Zwei Unternehmen stellen konkurrierende Energy-Drinks E_1 und E_2 her. Marktuntersuchungen haben ergeben, dass 70 % der Kunden E_1 je Übergangsperiode treu bleiben, während 35 % von E_2 nach E_1 wechseln.

   Aktuell ($t = 0$) liegt der Marktanteil bei 60 % für E_1 und 40 % für E_2.
   a) Geben Sie die zugehörige Übergangsmatrix an.
   b) Bestimmen Sie mit Hilfe dieser Matrix die zu erwartende Kundenverteilung nach einer Periode, also zu $t = 1$.
   c) Das Unternehmen, das E_2 produziert, plant zu $t = 1$ die Einführung eines neuen Energy-Drinks E_3. Eine vorab durchgeführte Marktanalyse ergab, dass bei einer Einführung von E_3 10% von E_1 zu E_3 wechseln. Die Kunden von E_2 bleiben zu 65 % ihrer Marke treu und lehnen E_3 ab. Die neue Marke E_3 behält zu 50 % ihrer neuen Kunden, 40 % wechseln zu E_2. Stellen Sie eine neue Übergangsmatrix mit dem unbekannten Anteil der Kunden, die E_1 treu bleiben, auf.
   d) Wie viel Prozent der Kunden von E_1 müssen ihrer Marke treu bleiben, damit der Marktanteil von E_1 nach einer Periode auch nach Einführung von E_3 gleich bleibt, wenn man von der Marktaufteilung zu $t = 1$ ausgeht?

8. Im Rahmen der Textilproduktion eines Unternehmens sollen Sporthosen und Funktionsshirts hergestellt werden. Dazu werden die Rohstoffe Baumwolle (B), Elasthan (E) und Polyamid (P) verwendet. Aus diesen Rohstoffen werden zunächst zwei Stoffe, Jersey und Stretch, gefertigt, die dann in der Weiterverarbeitung zu Sporthosen (SH) und Funktionsshirts (FS) verarbeitet werden.

   Für die Produktion von 1 Meter Jersey werden 2 Kilogramm Baumwolle und 0,5 Kilogramm Elasthan benötigt. Für die Herstellung von 1 Meter Stretch werden 0,3 Kilogramm Baumwolle, 1 Kilogramm Polyamid und 0,2 Kilogramm Elasthan verwendet.

   Für die Produktion einer Sporthose werden 1,5 Meter Jersey und 0,5 Meter Stretch, sowie zusätzlich 0,1 kg Polyamid benötigt. Ein Funktionsshirt benötigt 1 Meter Jersey und 0,3 Meter Stretch.

   a) Geben Sie den Gesamtbedarf der Rohstoffe B, E und P für jeweils eine Sporthose bzw. ein Funktionsshirt in Form einer Matrix an.
   b) Ein Kunde bestellt 100 Sporthosen und 200 Funktionsshirts. Bestimmen Sie mithilfe der Gesamtbedarfsmatrix den Bedarf an Baumwolle, Elasthan und Polyamid für diesen Auftrag.
   c) Die Preise in € für die Rohstoffe betragen (pro Kilogramm):

B	E	P
3	10	5

   Berechnen Sie – unter der Annahme, dass keine Fixkosten anfallen – die Kosten des Auftrags aus b).
   d) In einer Woche werden 1000 Sporthosen und 2000 Funktionsshirts hergestellt. Wie viele Meter Jersey und wie viel Meter Stretch werden dafür benötigt?
   e) Wenn noch 600 Meter Jersey, 190 Meter Stretch und 100 kg Polyamid auf Lager sind, wie viele Sporthosen und wie viele Funktionsshirts können dann noch hergestellt werden, wenn der gesamte Stoffvorrat zur Gänze aufgebraucht werden soll?

9. $\boxed{\text{P 5}}$ Ein Unternehmen produziert Möbel in zwei Produktionsstufen. In der ersten Stufe werden die Zwischenprodukte Einlegeböden (EB), Platten (PL) und Befestigungen (BF) aus den Rohstoffen Hartfaserplatte (H), Acrylfarbe (A), Papierfüllung (P) und Metall (M) gefertigt. In der zweiten Stufe erfolgt die Endmontage unter Verwendung der Zwischenprodukte und weiterer Rohstoffe.

Der Bedarf an Rohstoffen für die Fertigung der Zwischenprodukte (in Einheiten pro Produkt) ist durch folgende Bedarfsmatrix gegeben:

	Zwischenprodukte		
Rohstoffe	EB	PL	BF
H	2	4	0
A	1	1	0,5
P	1	3	0
M	1	0	2

In der zweiten Stufe werden die Endprodukte Regal (RE), TV-Bank (TV) und Beistelltisch (BT) aus den drei Zwischenprodukten gefertigt und zwar werden:

- für ein Regal: 5 Einlegeböden, 6 Platten, 8 Befestigungen und eine Einheit des Rohstoffs Metall,
- für eine TV-Bank: 2 Einlegeböden, 4 Platten, 6 Befestigungen und zwei Einheiten Metall und
- für einen Beistelltisch: 1 Einlegeboden, 2 Platten, 4 Befestigungen benötigt.

a) Wie lautet die Gesamtbedarfsmatrix und was bedeuten ihre Einträge?

b) Ein Kunde bestellt 15 Regale, 10 TV-Bänke und 20 Beistelltische. Wie hoch ist der Bedarf an Rohstoffen für diesen Auftrag?

c) Die Preise in € für die Rohstoffe betragen (pro Einheit):

H	A	P	M
10	7	3	5

Berechnen Sie – unter der Annahme, dass jeder Auftrag mit Fixkosten von € 2.000.- verbunden ist – die Kosten des Auftrags aus c).

10. Bestimmen Sie alle Lösungen der folgenden linearen Gleichungssysteme:

a)
$$\begin{array}{rcrcrcr} \frac{1}{3}x & + & \frac{1}{2}y & + & \frac{1}{6}z & = & \frac{1}{6} \\ x & + & 2y & - & z & = & 4 \\ -3x & - & 5y & & & = & -5 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{rcrcr} 2x_1 & - & 4x_2 & = & 4 \\ 5x_1 & - & 10x_2 & = & -8 \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & z & - & w & = & 1 \\ -2x & - & y & - & 2z & + & w & = & -2 \\ -x & - & y & - & z & + & w & = & -1 \end{array}$$

11. $\boxed{\text{P 6}}$ Ein Pharmaunternehmen stellt ein neues Antiallergikum in Tablettenform her. Jede Tablette hat ein Gewicht von 120 mg und besteht aus einem Wirkstoff, einem Füllstoff und der Beschichtung (Coating). Für die Herstellung dieser Tabletten müssen bestimmte Verhältnisse zwischen den drei Bestandteilen präzise eingehalten werden, um die gewünschte therapeutische Wirkung zu erzielen:

    Die Menge des Wirkstoffs in einer Tablette muss doppelt so hoch sein wie die Menge des Coatings. Der Füllstoff muss genau so viel wiegen, wie die Summe aus Wirkstoff und Coating. Das Gewicht des Coatings muss ein Drittel des Gewichts des Füllstoffs ausmachen.

    a) Stellen Sie ein Gleichungssystem auf, um die genauen Mengen an Wirkstoff, Füllmittel und Coating zu ermitteln, die erforderlich sind, um eine Tablette mit den geforderten Vorgaben herzustellen. Erklären Sie dabei die jeweilige Bedeutung der von Ihnen verwendeten Variablen.
    b) Lösen Sie das Gleichungssystem mit Hilfe des Gauß-Algorithmus. Prüfen Sie, ob Ihre Lösung plausibel ist.
    c) Welche Lösung erhalten Sie, wenn gefordert wird, dass das Gewicht des Coatings die Hälfte des Gewichts des Füllstoffs ausmachen muss?

12. $\boxed{\text{P 7}}$

a) Berechnen Sie jeweils die Determinante der folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} -17 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -24 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

b) Berechnen Sie die Determinante der folgenden Matrix auf zwei Arten. Welche Besonderheit können Sie sich dabei zunutze machen?

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ -7 & 2 & -8 \end{pmatrix}$$

13. Gegeben sind die Vektoren $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $c = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie den Vektor $d = a + 2 \cdot b$ (d heißt "Linearkombination" von a und b), skizzieren Sie ihn in einem geeigneten Koordinatensystem und berechnen Sie seinen Betrag (Länge).

b) Stellen Sie den Vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ als Linearkombination von a und b dar.

c) Was erhalten Sie, wenn Sie versuchen den Vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ als Linearkombination von b und c darzustellen?

14. Sind die folgenden Vektoren linear unabhängig?

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

15. $\boxed{\text{P 8}}$ Gegeben ist die Matrix C mit einem Parameter $p \in \mathbb{R}$:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & 2 \\ p & 0 & p \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die Determinante der Matrix C in Abhängigkeit von p.

b) Für welche $p \in \mathbb{R}$ ist die Matrix C invertierbar?

c) Bestimmen Sie den Rang der Matrix $A = C - C^T$.

16. Gegeben sind die Matrix A und der Vektor b:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & \mu \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ \lambda \\ -6 \end{pmatrix} \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

a) Für welche Werte von $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ besitzt $Ax = b$ eine eindeutige Lösung?

b) Für welche Werte von $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ besitzt $Ax = b$ keine Lösung?

17. P 9 Gegeben ist das folgende Gleichungssystem mit Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & & & = & 12 \\ 2x & + & 3y & + & z & = & 10 \\ x & & & + & a \cdot z & = & b \end{array}$$

a) Kann dieses lineare Gleichungssystem genau drei verschiedene Lösungen besitzen? Begründen Sie!

b) Wie groß ist der Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix für $a = 2$ und $b = 0$?

c) Für welche Werte von a und b besitzt das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen? Geben Sie diese Lösungen an.

18. Gegeben sind die Matrix A und der Vektor b:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -t^2 \\ -1 & 16 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ t \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad t \in \mathbb{R}$$

a) Für welche Werte von $t \in \mathbb{R}$ besitzt $Ax = 0$ nur die triviale Lösung?

b) Für welche Werte von $t \in \mathbb{R}$ ist $Ax = b$ lösbar?

19. Gegeben ist die Matrix A und der Vektor b:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -5 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Berechnen Sie die Inverse der Matrix A und führen Sie eine Probe durch!

b) Bestimmen Sie nun mit Hilfe der Inversen die eindeutige Lösung des Gleichungssystems $A \cdot x = b$!

Die mit P gekennzeichneten Beispiele sind von den Studierenden vorzubereiten und nach Aufruf durch den/die Lehrveranstaltungsleiter/in zu präsentieren!