

# Wirtschaftsmathematik - Übungen SS 2024

## Blatt 3: Folgen und Reihen

1. Gegeben ist die Folge

$$a_n = \frac{5n}{n+1}$$

- Berechnen Sie die ersten vier Glieder dieser Folge, stellen Sie eine Vermutung über das Monotonieverhalten auf und beweisen Sie diese Vermutung!
  - Zeigen Sie, dass 6 eine obere Schranke dieser Folge ist.
  - Bestimmen Sie – wenn möglich – eine untere Schranke und begründen Sie Ihre Wahl. Was lässt sich dann über Beschränktheit und Konvergenz der Folge aussagen?
2. Untersuchen Sie die durch ihr Bildungsgesetz angegebene Folge auf Monotonie, Beschränktheit und Konvergenz:

$$b_n = n^2 - 6n + 10$$

3. **P 21** Gegeben ist die Folge:

$$a_n = \frac{2n+3}{n+1}$$

- Untersuchen Sie die Folge auf Monotonie (Beweis!).
  - Zeigen Sie, dass 1 eine untere Schranke der Folge ist.
  - Bestimmen Sie – wenn möglich – eine obere Schranke und begründen Sie Ihre Wahl. Ist die Folge konvergent?
4. **P 22** Ein Unternehmen produziert Trekking-Fahrräder und möchte ausgehend vom Jänner 2024 bis Dezember 2025 die Produktion monatlich um eine konstante Stückzahl erhöhen. Geplant ist, dass im März 2024 genau 2.100 Stück produziert werden sollen und dass ausgehend vom März 2024 die Stückzahl bis Oktober 2024 um genau 10 Prozent ansteigen soll.
- Wie hoch muss die Anfangsproduktion im Jänner 2024 sein?
  - Welche Stückanzahl wird im März 2025 produziert?
  - Wie hoch ist die gesamte Stückzahl, die von Jänner 2024 bis Dezember 2025 produziert wird?

5. Gegeben ist eine geometrische Folge mit  $q = 3$ .

- a) Bestimmen Sie  $a_5$ , wenn  $a_1 = \frac{1}{9}$  ist!
- b) Bestimmen Sie  $a_7$ , wenn  $a_3 = 1$  ist!
- c) Berechnen Sie  $s_5$ , wenn  $a_1 = \frac{1}{9}$  ist.
- d) Berechnen Sie  $a_1$ , wenn  $s_3 = 117$  ist!

6. **P 23** Vier Zahlen sind die ersten vier Glieder einer geometrischen Folge mit  $q > 0$ . Der Quotient aus der vierten und der zweiten Zahl ergibt  $\frac{1}{25}$ . Die Summe der vier Zahlen ergibt 312. Wie lautet die erste Zahl?

7. Bestimmen Sie die Grenzwerte:

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 2n}{2n^2 + 1} \qquad b) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n^2 + 3}{n + 2} - \frac{4n^2}{2n + 1} \right)$$

8. **P 24** Bestimmen Sie mit Hilfe der Grenzwertrechenregeln den Grenzwert:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n^2 + 7}{2n + 1} - \frac{3n^2 - 5}{3n + 3} \right)$$

9. Gegeben ist die Folge

$$a_n = \left( \frac{1}{2} \right)^n$$

- a) Geben Sie zur Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  die zugehörige Reihe  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  an, indem Sie die Partialsummen  $S_n$  berechnen.
  - b) Geben Sie im Fall der Existenz den Grenzwert der  $S_n$  an.
  - c) Schreiben Sie die Reihe unter Verwendung des Summenzeichens und berechnen Sie – sofern möglich – diese Summe.
10. **P 25** Der australische Bergbaukonzern RT plc betreibt eine Goldmine in West Australien. Im ersten Jahr betrug die abgebaute Menge Gold 1.250 kg. In den darauffolgenden Jahren werden nur noch  $\frac{3}{5}$  (= 60%) der Menge des Vorjahres abgebaut.
- a) Welche Goldmenge wird im 4. Jahr abgebaut?
  - b) Wie groß ist die in den ersten 3 Jahren insgesamt geförderte Menge Gold? Berechnen Sie die gesuchte Menge unter Verwendung einer Summenformel.
  - c) Welche Menge Gold kann insgesamt gefördert werden, wenn man diesen Abbauvorgang (theoretisch) unendlich lange fortsetzen würde?

11. Prüfen Sie, ob die folgenden Reihen konvergieren. Wenn ja, was ist ihre Summe?

$$a) \sum_{i=2}^{\infty} 2^{2i+1} \cdot 7^{-i+1}$$

$$b) \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{16}{9}\right)^{\frac{i}{2}}$$

12. **P 26** Gegeben ist die folgende Reihe:

$$\sum_{i=2}^{\infty} (x+2)^i$$

a) Bestimmen Sie – wenn möglich – den Wert der Reihe für  $x = -\frac{6}{5}$ .

b) Für welches  $x \in \mathbb{R}$  hat die Reihe den Wert  $\frac{1}{2}$ ?

13. Für welche  $x \in \mathbb{R}$  konvergiert die folgende geometrische Reihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{5^n}$$

**Fertigen Sie für die folgenden Aufgaben jeweils eine graphische Darstellung der Zahlungsströme an und lösen Sie dann die Aufgaben. Geben Sie sämtliche Zwischenschritte zur Bestimmung der jeweiligen Lösung an. Das Anschreiben einer Formel alleine genügt nicht!**

14. Herr L. verkauft eine Immobilie. Er kann zwischen zwei Angeboten wählen:

Angebot A: € 11.000.- sofort,

Angebot B: € 13.310.- in drei Jahren, d.h. zu  $t = 3$ .

Vergleichen Sie die Angebote bei einem Zinssatz von 10%. Ermitteln Sie jeweils den Barwert und den Endwert.

15. Eine Firma plant in eine Maschine mit einer Nutzungsdauer von 5 Jahren zu investieren. Für die Maschine fallen am 1.1.2019 Anschaffungskosten in der Höhe von € 34.000.- und am 1.1.2022 Kosten für Wartungsarbeiten in der Höhe von € 27.000.- an. Der Restwert der Maschine nach 5 Jahren beträgt € 0.-. Auf der Einnahmenseite kalkuliert die Firma, dass jeweils am Jahresende (beginnend am 31.12.2019 bis zum 31.12.2023) Gewinne in der Höhe von € 24.300.- erwirtschaftet werden können.

a) Soll die Firma diese Investition tätigen, wenn sie mit einem (unrealistischen) kalkulatorischen Jahreszinssatz von  $i = \frac{1}{2}$  rechnet und nach dem Kapitalwertkriterium entscheidet? Hinweis: Verwenden Sie Bruchschreibweise!

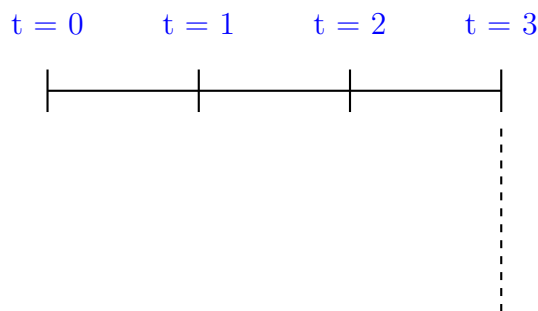
b) Berechnen Sie den Kapitalwert  $K$  für das Investitionsprojekt, wenn das Unternehmen dieselben Kosten wie in a) kalkuliert, aber eine unendliche Nutzungsdauer unterstellt.

16. **P 27** Ein Investor besitzt am 1.1.2024 eine Anleihe mit einer Restlaufzeit von drei Jahren und überlegt sich folgende Anlagemöglichkeiten:

- A: er verkauft die Anleihe am 1.1.2024 um € 12.500,- und legt das Geld auf ein Konto, wobei dort die jährliche Verzinsung (unrealistische)  $i = \frac{1}{5} = 20\%$  beträgt.
- B: er behält die Anleihe bis zum Ende der Laufzeit. Dafür bekommt er jährlich am 31.12. Zinszahlungen in der Höhe von € 400,-. Am Ende der Laufzeit wird die Anleihe mit € 20.000,- getilgt. Die jährlichen Zinszahlungen legt er auf ein Konto, das mit  $i = \frac{1}{4} = 25\%$  verzinst wird. Für welche Variante sollte sich der Investor entscheiden?

Hinweis: Verwenden Sie Bruchschreibweise!

- Tragen Sie in nachstehende Zeitskala die zwei Zahlungsströme, sowie die Bewertung jeder einzelnen Zahlung zu  $t = 3$  ein!
- Bestimmen Sie nun welche Variante für den Investor besser ist.



17. Frau F. zahlt zu Beginn jeden Jahres, fünf Jahre lang, einen Geldbetrag auf ein Sparbuch ein, um am Ende des fünften Jahres eine Reise im Wert von € 6.330,- finanzieren zu können. Wie hoch muss der Geldbetrag sein, wenn die Verzinsung jährlich (unrealistische) 50% beträgt?

18. Herr E. zahlt viermal im Jahr einen Betrag in Höhe von € 2.000,- jeweils am Beginn jeden Quartals auf

- ein Sparkonto ein, das mit  $i = 4\%$  p. a. verzinst ist (Zinsverrechnung erfolgt am Sparkonto nur am Jahresende).
- ein Girokonto ein, das mit  $i = 4\%$  p. a. verzinst ist (Zinsverrechnung erfolgt bei diesem Girokonto am Ende jeden Quartals).

Welcher Betrag befindet sich am Ende des Jahres auf dem jeweiligen Konto, wenn sich am Anfang des Jahres bereits € 10.000,- darauf befinden? Hinweis: Für Zeiträume unter einem Jahr werden Zinsen linear verrechnet! Für Aufgabe b) kann ein Taschenrechner verwendet werden.

19. **P 28** Eine Druckerei möchte eine Digitaldruckmaschine kreditfinanziert anschaffen. Sie plant, vier Jahre lang jedes Jahr am Jahresende einen gleich bleibenden Betrag  $R$  zurückzuzahlen, um den Kredit zu tilgen. Wie hoch ist dieser Betrag, wenn die Maschine zu Jahresbeginn des ersten Jahres 7.380 Euro kostet und mit einem (unrealistischen) Zinssatz von  $i = 25\%$  kalkuliert wird?
- Fertigen Sie eine graphische Darstellung der Zahlungsströme an!
  - Lösen Sie die Aufgabe unter Verwendung der Summenformel einer Folge!

Die mit **P** gekennzeichneten Beispiele sind von den Studierenden vorzubereiten und nach Aufruf durch die Lehrveranstaltungsleitung zu präsentieren!