Wirtschaftsmathematik - Übungen SS 2024

Blatt 2: Mathematische Grundlagen

1. Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke:

   a) $\dfrac{(2x^{3-2n} \cdot y)^2}{(4x^{2n})^3} : \dfrac{(x^{n+2})^2}{8x^{12n}} =$

   b) $\dfrac{3x^{-\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{x^5}}{\sqrt{9x}} =$

2. $\boxed{\text{P 10}}$ Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke soweit möglich:

   a) $\dfrac{3^4 \cdot a^{-2} \cdot a^0}{(ab)^{-2}} \cdot \left(\dfrac{b^{-1}}{9^{-1}b^{-2}a}\right)^{-1} - \dfrac{3ab}{2}$

   b) $\left[5^{-\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{5^{-4}}\right] : \left[\left(5^{\frac{1}{3}}\right)^{-2} \sqrt[3]{5}\right]$

3. Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke:

   a) $\dfrac{5!}{2!3!}$

   b) $\dfrac{(n-1)!}{(n-3)!}$

4. Stellen Sie den folgenden Term als Logarithmus eines Terms dar:

$$\log(x+2) - \frac{1}{2} \cdot \log(x-1) + 2 \cdot \log(x)$$

5. $\boxed{\text{P 11}}$ Vereinfachen Sie soweit möglich:

$$-\log_2(128) + 2^{3 \cdot \log_2(4)} + \log_5 \sqrt{5^3} =$$

6. Berechnen Sie:

$$\frac{1}{3} \cdot \sum_{i=1}^{3} (3i-1)^2 - 25 =$$

7. Berechnen Sie die folgende Doppelsumme:

$$\sum_{k=1}^{2} \sum_{i=10}^{13} \frac{i+1}{k}$$

8. $\boxed{\text{P 12}}$ Berechnen bzw. vereinfachen Sie die folgende Doppelsumme soweit möglich:

$$\frac{2!}{3!} \cdot \sum_{n=2}^{3} \sum_{k=1}^{4} \frac{(-1)^n}{2} \cdot n \cdot k^2$$

9. Bestimmen Sie jeweils die Definitionsmenge der folgenden Gleichungen, lösen Sie die Gleichungen nach der Variablen x auf und geben Sie die Lösungsmenge an:
   a) $\sqrt{x-1} - \sqrt{x-4} = 1$
   b) $16^{x-1} = 4 \cdot 8^{x+1}$
   c) $\frac{1}{3} = 3 \cdot e^{-0{,}2 \cdot x} \qquad (\ln(3) \approx 1{,}10)$
   d) $2 \cdot \log_{10}(x-2) - \log_{10}(x) = 0$
   e) $\left(x^3 - 8\right) \cdot \sqrt{x^2 - 9} = 0$

10. $\boxed{\text{P 13}}$ Bestimmen Sie die größtmögliche Definitionsmenge $D \subset \mathbb{R}$ der folgenden Gleichung und geben Sie die Lösungsmenge an.

$$\frac{x}{x-2} = \frac{2}{x^2 - 2x} + \frac{1}{x}$$

11. $\boxed{\text{P 14}}$ Die folgende Wurzelgleichung ist für $x \in]-\infty; 3]$ definiert. Lösen Sie die Gleichung nach der Variablen x auf und geben Sie die Lösungsmenge an.

$$\sqrt{19 - x + \sqrt{3 \cdot (6 - 2x)}} = 4$$

12. Lösen Sie die folgenden Ungleichungen und geben Sie jeweils die Lösungsmenge über $\mathbb{R}$ an:
   a) $\left|\frac{1}{2}x - 2\right| \leq x + 1$
   b) $\frac{3x+1}{x+1} < 2$
   c) $\frac{2x^2 + x}{x^2 + 1} < 2$
   d) $2x^2 + 2x > 4$
   e) $4x^2 \leq 16$

13. $\boxed{\text{P 15}}$ Lösen Sie die folgende Betragsungleichung in $\mathbb{R}$:

$$\frac{-4}{|x+2|} > -2$$

14. $\boxed{\text{P 16}}$ Geben Sie die Lösungsmenge der folgenden Ungleichung über $\mathbb{R}$ an:

$$\frac{3x+1}{x+2} \geq 1$$

15. $\boxed{\text{P 17}}$ Geben Sie die Lösungsmenge der folgenden Ungleichung über $\mathbb{R}$ an:

$$\frac{x+3}{2} > x^2$$

16. Skizzieren Sie ein Venn-Diagramm mit zwei Mengen – beide Teilmengen einer Grundmenge G – *im allgemeinsten Fall* und kennzeichnen Sie folgende Menge:

$$\left(\overline{A} \cap B\right) \cup (A \cap B)$$

17. Die Menge $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, x, y, z, d, e\}$ hat die Teilmengen $A = \{1, 3, x, d\}$, $B = \{2, 4, x, d\}$ und $C = \{3, x, y, d, e\}$. Erstellen Sie ein Venn-Diagramm und bestimmen Sie die folgenden Mengen:

a) $A \cap B$	*b)* $A \cup C$	*c)* $A \setminus C$
d) $\bar{C}$	*e)* $A \triangle C$	*f)* $\left(\bar{A} \cup B\right) \setminus B$

18. $\boxed{\text{P 18}}$ Gegeben sind die Mengen

$$A = \{1, 4\}, \quad B = \left[-\frac{1}{3}; 4\right[\cap \mathbb{Z}, \quad M = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

a) Bestimmen Sie $A \triangle B$ sowie $B \setminus A$.

b) Bestimmen Sie die Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$ der Menge A

c) Bestimmen Sie die Komplementmenge $\overline{A}$ der Menge A bezüglich der Menge M und geben Sie $\left|\overline{A}\right|$ an.

d) Setzen Sie das passende Zeichen ein: $\subset$, $\not\subset$,$\in$, $\notin$ oder $=$

i. $1 \ldots B \setminus A$

ii. $A \ldots M$

19. Bei einer Umfrage wurden 650 Studierenden danach gefragt, ob sie regelmäßig die Zeitung A, B oder C lesen. Die Auswertung ergab, dass 303 Studierende die Zeitung A lesen, 252 davon nur A; 90 Studierende lesen nur die Zeitung B; 5 Studierende lesen die Zeitung B und C; 14 Studierende lesen die Zeitung A und die Zeitung B, nicht aber Zeitung C; 35 Studierende lesen die Zeitung A und die Zeitung C, nicht aber Zeitung B; 195 Studierende lesen keine dieser drei Zeitungen.

Erstellen Sie ein Venn Diagramm des Sachverhaltes und bestimmen Sie die Anzahl der Studierenden, die alle drei Zeitungen lesen und die Anzahl der Studierenden, die nur C lesen!

20. $\boxed{\text{P 19}}$ Eine Fussballtrainerin hat in ihrer Mannschaft 18 Spielerinnen. Davon sind 8 Verteidigerinnen und 6 Mittelfeldspielerinnen. Eine Spielerin kann nur als Torfrau eingesetzt werden. Drei Spielerinnen können sowohl in der Verteidigung, als auch im Mittelfeld als auch im Sturm spielen, fünf können im Mittelfeld und im Sturm spielen, und vier können im Mittelfeld und in der Verteidigung eingesetzt werden. Im Sturm und in der Verteidigung können drei Spielerinnen spielen.
    a) Wie viele reine Stürmerinnen gibt es?
    b) Wie viele reine Verteidigerinnen gibt es?

21. Gegeben sind die folgenden Mengen:

$$M_1 = \{x \in \mathbb{R} \,|\, 2 < x \leq 6\} \qquad M_2 = \{0, 3\} \qquad M_3 = [1; 4]$$

    a) Skizzieren Sie diese Mengen auf je einer Zahlengeraden der reellen Zahlen
    b) Bestimmen Sie den Durchschnitt $\bigcap_{i=1}^{3} M_i$ aller drei Mengen!
    c) Bestimmen Sie die Vereinigung $\bigcup_{i=1}^{3} M_i$ aller drei Mengen!
    d) Bestimmen Sie die Komplementmenge von M_1 bezüglich $\mathbb{R}$!
    e) Bestimmen Sie die symmetrische Differenz von M_1 und M_3!
    f) Geben Sie die Potenzmenge der Menge M_2 an und bestimmen Sie $|M_2|$ sowie $|\mathcal{P}(M_2)|$!

22. Gegeben sind die folgenden Mengen:

$$A = \{2, 4\} \qquad B = \{x \in \mathbb{N} \,|\, x^3 < 64\}$$

    Bestimmen Sie das kartesische Produkt $A \times B$ und skizzieren Sie diese Menge in einem geeigneten Koordinatensystem.

23. Skizzieren Sie die folgende Menge in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Ist diese Menge konvex? (Hinweis: Eine Menge heißt konvex, wenn sie zu je zwei beliebigen Punkten auch deren ganze Verbindungsstrecke enthält.)

$$A = \left\{(x, y) \in R^2 \;\middle|\; (x-1)^2 + (y+2)^2 \leq 9 \wedge x \geq 0 \wedge y > 0\right\}$$

24. Gegeben sind die folgenden Mengen:

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;|\; |x| \leq 2 \wedge |y| \leq 2\right\}$$

$$B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y < \frac{1}{4}x^2 + 1\right\}$$

    Kennzeichnen Sie Menge $A \cap B$ in einem geeigneten Koordinatensystem. Ist diese Menge konvex?

25. $\boxed{\text{P 20}}$ Gegeben sind die Mengen A und B, die wie folgt definiert sind:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \;\;|\;\; (x-2)^2 + (y+1)^2 \leq 4\}$$
$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \;\;|\;\; y \geq -x + 1 \wedge y < -1\}$$

Skizzieren Sie die Menge $A \cap B$ in einem geeigneten Koordinatensystem. Ist diese Menge konvex?

Die mit $\boxed{\text{P}}$ gekennzeichneten Beispiele sind von den Studierenden vorzubereiten und nach Aufruf durch die Lehrveranstaltungsleitung zu präsentieren!