Wirtschaftsmathematik - Übungen SS 2024

Blatt 1: Lineare Algebra

1. Gegeben ist eine 3×3 Matrix $A = (a_{ij})$ mit

$$a_{ij} = \begin{cases} 2^{j-i} & \text{für} \quad i < j \\ (-1)^i \cdot j & \text{für} \quad i = j \\ i - j & \text{für} \quad i > j \end{cases}$$

eine Matrix $B^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, ein Zeilenvektor $u = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ sowie ein Spaltenvektor $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   a) Schreiben Sie die Matrix A an!
   b) Berechnen Sie $u \cdot v$.
   c) Berechnen Sie – wenn möglich: $A \cdot B$ und $B \cdot A$.

2. $\boxed{\text{P 1}}$ Gegeben sind die Matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, zwei Vektoren $x^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix}$ und $y = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, sowie eine 3×3 Matrix $B = (b_{ij})$ mit

$$b_{ij} = \begin{cases} i + j + 1 & \text{falls } i \cdot j \text{ gerade} \\ i \cdot j & \text{falls } i \cdot j \text{ ungerade} \end{cases}$$

   a) Bestimmen Sie die Matrix B.
   b) Berechnen Sie – wenn möglich:
      i. $A + B, \quad A \cdot B, \quad A^T \cdot (E - B)$.
      ii. $y^T \cdot x, \quad A \cdot y^T$

3. $\boxed{\text{P 2}}$ Zeigen Sie für eine allgemeine 2×2- Matrix A, dass die Matrix $A \cdot A^T$ existiert und symmetrisch ist.

4. Gegeben sind die regulären (invertierbaren) $n \times n$-Matrizen A, B, C und X. Lösen Sie die folgenden Matrizengleichungen nach der Matrix X auf. Welche Vorraussetzungen müssen dabei erfüllt sein?
   a) $(A + B) \cdot X = \left(X^T \cdot B^T\right)^T + C$
   b) $A - X \cdot A + C = X \cdot B$

5. $\boxed{\text{P 3}}$ A, B, C und X sind reguläre (invertierbare) $n \times n$-Matrizen. Bestimmen Sie die Lösungsmatrix X der folgenden Matrizengleichung:

$$2AX + BX - 3 \cdot C = 2 \cdot (B - C) + 3B$$

   Welche Voraussetzung muss dabei erfüllt sein?

6. Eine Autovermietung auf einer Ferieninsel hat drei Standorte, einen am Flughafen (F), einen im Zentrum der Hauptstadt (Z) und einen am Hafen (H). Kunden können PKW's für einen Tag an einer der drei Niederlassungen mieten und an einer beliebigen anderen ohne Aufpreis zurückgeben. Eine Analyse zeigt folgendes Wechselverhalten:
   - nach Niederlassung F kehren 60 % der ausgeliehenen Fahrzeuge zurück; je 20 % wechseln nach Z bzw. H.
   - 70 % der Fahrzeuge, die am Morgen in Niederlassung Z stehen, stehen am nächsten Morgen wieder in Z, 10 % sind von Z nach F, der Rest nach H gewechselt.
   - von Niederlassung H aus wechseln erfahrungsgemäß 20 % nach Niederlassung F, 40 % nach Z und 40 % kehren wieder zurück nach H.

   a) Stellen Sie die Übergangsmatrix U für den Übergang zum nächsten Tag auf!
   b) Die Autovermietung besitzt 225 PKW, die sich im Verhältnis 3 : 4 : 2 auf die Standorte F, Z und H aufteilen. Bestimmen Sie die Anzahl der Fahrzeuge an den drei Standorten am Morgen des nächsten Tages.
   c) Ermitteln Sie die Anzahl der Fahrzeuge an den drei Standorten am Morgen des Vortages, wenn man annimmt, dass die Übergangsmatrix aus a) auch für die Vorperiode gegolten hat und die Inverse der Matrix U

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

   lautet.

7. $\boxed{\text{P 4}}$ Die 200 Einkaufswagen eines Supermarktes stehen montags vor Ladenöffnung alle auf einem Platz vor dem Eingang (E). Während eines Einkaufstages wechseln die Wagen ihre Plätze. Die meisten Kunden lassen den Wagen auf einem Abstellplatz auf dem Parkplatz (P) stehen. Die anderen stellen die Wagen wieder auf den Platz vor dem Eingang zurück. Zählungen über einen längeren Zeitraum hin ergaben folgende Tabelle für das Wechselverhalten während eines Einkaufstages:

		nach	
		E	P
von	E	0,2	0,8
	P	0,1	0,9

a) Erstellen Sie eine Übergangsmatrix U und erläutern Sie die Bedeutung der Einträge 0,2 und 0,1 im gegebenen Kontext.

b) Wie viele Einkaufswagen befinden sich montags am Ende des Einkaufstages auf dem Abstellplatz auf dem Parkplatz P?

c) Angenommen am Ende eines Einkaufstages werden am Standort E 30 und am Standort P 170 Einkaufswagen gezählt. Wie waren die Einkaufswagen am Beginn des Einkaufstages aufgeteilt?

Hinweis: Für die Inverse einer 2×2–Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ gilt:

$$A^{-1} = \frac{1}{a \cdot d - b \cdot c} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

8. Ein Schokoladenproduzent erzeugt aus den drei Zutaten Schokolade (S), Nougat (N) und Marzipan (M) drei Pralinensorten „Edelbitter" (EB), „Nougattraum" (NT) und „Marzipanengel" (ME). Die folgende Tabelle zeigt, wie viel Gramm der jeweiligen Zutaten für die Erzeugung eines Stücks dieser drei Sorten nötig sind:

	Pralinensorten		
Zutaten	EB	NT	ME
S	8	6	5
N	1	4	1
M	1	2	5

Der Produzent verkauft die Pralinen in zwei verschiedenen Verpackungen, „Süße Versuchung" (SVG) sowie „Gourmet Pralines" (GPS). Die Tabelle zeigt, wie viel Stück der drei Pralinensorten in der jeweiligen Verpackung enthalten sind:

	Verpackung	
Pralinensorten	SVG	GPS
EB	2	6
NT	4	4
ME	4	0

a) Geben Sie den Gesamtbedarf der Zutaten S, N, M für jeweils eine Packung SVG bzw. GPS in Form einer Matrix an.

b) Welche Mengen an Zutaten sind zur Herstellung von zwei Packungen SVG und fünf Packungen GPS erforderlich?

c) Berechnen Sie die Gesamtkosten dieser Produktion für folgende Rohstoffpreise:

S	N	M
5	1	2

d) Eine neue Verpackung „Valentine" (VAL) soll fünf Stück Edelbitter- und sieben Stück Nougattraum-Pralinen enthalten. An einem Vormittag werden 10 Packungen GPS und 20 Packungen VAL verkauft. Wie viel Stück EB und wie viel Stück NT werden dafür gebraucht?

e) Wenn an einem Nachmittag noch 80 Stück Pralinen der Sorte EB und 90 Stück der Sorte NT auf Lager sind, wie viele Packungen GPS und wie viele Packungen VAL können dann noch hergestellt werden, wenn alle vorrätigen Pralinen zur Gänze aufgebraucht werden sollen?

9. P 5 Ein Pharmaunternehmen stellt aus den Chemikalien C_1 bis C_3 zunächst die Grundmischungen G_1 und G_2 her, die dann zu den Medikamenten M_1 und M_2 weiterverarbeitet werden. Der Produktionsprozess lässt sich durch die beiden folgenden Tabellen beschreiben:

	Grundmischung	
Chemikalien	G_1	G_2
C_1	1	2
C_2	4	2
C_3	0	5

	Grundmischung	
Medikament	G_1	G_2
M_1	1	3
M_2	2	2

a) Wie lautet die Gesamtbedarfsmatrix, die angibt, wie viele Einheiten der Chemikalien C_1 bis C_3 für jeweils eine Einheit der Medikamente M_1 und M_2 benötigt werden?

b) Das Unternehmen möchte 20 Einheiten des Medikaments M_1 und 50 Einheiten des Medikaments M_2 herstellen. Wie viele Einheiten der Chemikalien C_1 bis C_3 werden dafür jeweils benötigt?

10. Bestimmen Sie alle Lösungen der folgenden linearen Gleichungssysteme:

a)
$$\begin{array}{rcrcrcr} 10x & + & 15y & + & 5z & = & 5 \\ x & + & 2y & - & z & = & 4 \\ 7x & + & 11y & + & 2z & = & 7 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{rrcrcr} & 2x & - & 4y & = & 6 \\ - & 3x & + & 6y & = & -8 \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & 2x_4 & = & 6 \\ -2x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & = & -8 \end{array}$$

11. P 6 Ein Unternehmen produziert drei Regaltypen T_1, T_2 und T_3. Für die Produktion werden die Rohstoffe Metall (M), Holz (H) und Kunststoff (K) benötigt. Der Bedarf der einzelnen Rohstoffe für jeweils ein Exemplar eines Regaltyps, sowie der derzeit verfügbare Lagerbestand an Rohstoffen ist der folgenden Tabelle zu entnehmen:

	Regaltyp			
Rohstoffe	T_1	T_2	T_3	Lagerbestand
M	3	2	4	31
H	2	1	3	21
K	4	2	4	36

Wie viele Exemplare der Regaltypen T_1, T_2 und T_3 kann das Unternehmen herstellen, wenn der gesamte Lagerbestand verbraucht werden soll?

12. $\boxed{\text{P 7}}$

a) Berechnen Sie jeweils die Determinante der folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} -3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Berechnen Sie die Determinante der Matrix C in Abhängigkeit eines Parameters $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & \lambda \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

i. mit Hilfe der Regel von Sarrus

ii. indem Sie die Matrix C auf Dreiecksform bringen.

c) Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ ist die Matrix C singulär?

13. Gegeben sind die Vektoren $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $c = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie den Vektor $d = 3a - 2 \cdot b$ (d heißt „Linearkombination“ von a und b), skizzieren Sie ihn in einem geeigneten Koordinatensystem und berechnen Sie seinen Betrag (Länge).

b) Stellen Sie den Vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ als Linearkombination von a und b dar.

c) Was erhalten Sie, wenn Sie versuchen den Vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ als Linearkombination von b und c darzustellen?

14. Sind die folgenden Vektoren linear unabhängig?

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

15. $\boxed{\text{P 8}}$ Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

a) Sind der zweite und der vierte Spaltenvektor der Matrix A linear abhängig? Begründen Sie!

b) Berechnen Sie den Rang der Matrix A.

16. Gegeben ist das folgende Gleichungssystem mit einer Konstanten $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 0 \\ -2x & - & 3y & & & = & -3 \\ x & + & 3y & + & az & = & a \end{array}$$

a) Für welchen Wert a gibt es unendlich viele Lösungen? Geben Sie diese Lösungen an!

b) Für welchen Wert von a gibt es genau eine Lösung? Bestimmen Sie diese Lösung!

17. $\boxed{\text{P 9}}$ Gegeben ist das lineare Gleichungssystem $A \cdot x = b$ mit:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -t \\ -1 & 3 & t \\ 1 & t & -4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -t \end{pmatrix}.$$

a) Für welchen Wert $t \in \mathbb{R}$ besitzt das Gleichungssystem keine Lösung.

b) Für welche Werte $t \in \mathbb{R}$ besitzt das Gleichungssystem genau eine Lösung. Wählen Sie nun ein t aus dieser Menge und geben Sie die zugehörige Lösung an.

c) Kann das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen besitzen? Bergünden Sie!

18. Gegeben sind die Matrix A und der Vektor b:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -t \\ t & -4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad t \in \mathbb{R}$$

a) Für welche Werte von $t \in \mathbb{R}$ besitzt $Ax = 0$ eine nichttriviale Lösung?

b) Für welche Werte von $t \in \mathbb{R}$ ist $Ax = b$ lösbar?

19. Gegeben ist die Matrix A und der Vektor b:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Berechnen Sie die Inverse der Matrix A und führen Sie eine Probe durch!

b) Bestimmen Sie nun mit Hilfe der Inversen die eindeutige Lösung des Gleichungssystems $A \cdot x = b$!

Die mit $\boxed{\text{P}}$ gekennzeichneten Beispiele sind von den Studierenden vorzubereiten und nach Aufruf durch die Lehrveranstaltungsleitung zu präsentieren!