

Klausur Wirtschaftsmathematik VO

03. Juli 2025

Bitte leserlich in Druckbuchstaben ausfüllen!

NACHNAME:	
VORNAME:	
MATRIKELNUMMER:	

ERLAUBT: Formelsammlung des Instituts, Taschenrechner laut Liste!

VERBOTEN: **Handy** und **Smartwatch** am Arbeitsplatz!

Lösungswege müssen nachvollziehbar angegeben werden!

Aufgabe	max. Punkte	erreichte Punkte
1	11	
2	12	
3	11	
4	13	
5	13	
Summe	60	
Note:		

1. a) (6 Punkte) In einer Siedlung mit 200 Haushalten gibt es genau drei Heizsysteme: Holzpellets, Wärmepumpe, und Photovoltaik. Jeder Haushalt nutzt mindestens ein Heizsystem. Von den 200 Haushalten verwenden 50 Photovoltaik. All diese, die Photovoltaik nutzen, verwenden auch mindestens ein weiteres Heizsystem: 19 verwenden auch eine Wärmepumpe, 43 heizen auch mit Holzpellets. 70 Haushalte verwenden nur Wärmepumpe, 55 Haushalte verwenden nur Holzpellets.

Stellen Sie den Sachverhalt in einem Venn-Diagramm dar und bestimmen Sie die Mächtigkeiten aller Teilmengen. Geben Sie die Anzahl der Haushalte, die alle drei Heizsysteme verwenden, an.

- b) (5 Punkte) Gegeben ist die folgende Ungleichung:

$$7x < 3 \cdot |5 - x|$$

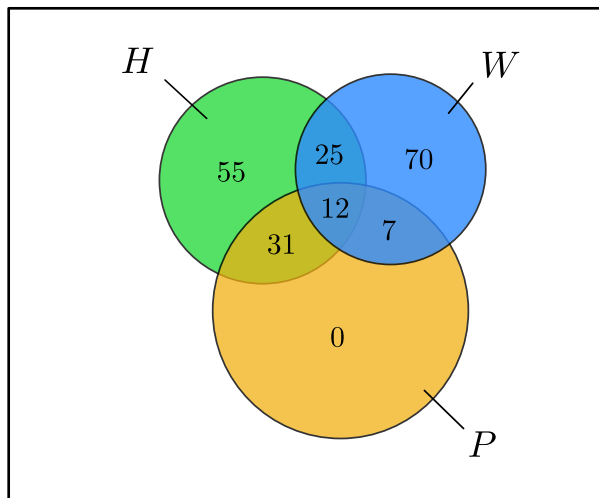
Geben Sie die Lösungsmenge der Ungleichung an.

Ausführung Beispiel 1:

Ausführung Beispiel 1:

Lösung:

a)



alle 3 Heizsysteme: 12 Haushalte

b) $\mathbb{L} =] - \infty; \frac{3}{2}[$

2. Gegeben sind die 4×4 Matrix $A = (a_{ij})$ mit

$$a_{ij} = \begin{cases} i + j & \text{für } i < j \\ 2i - j & \text{für } i = j \\ i \cdot j & \text{sonst} \end{cases}$$

und die drei Vektoren

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ und } c = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

- a) (6 Punkte) Schreiben Sie die Matrix A an und berechnen Sie, falls möglich, $b^T \cdot A^T$ und $c \cdot A$.
- b) (6 Punkte) Prüfen Sie die lineare Unabhängigkeit der Vektoren a , b und c .

Ausführung Beispiel 2:

Ausführung Beispiel 2:

Lösung:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 3 & 7 \\ 4 & 8 & 12 & 4 \end{pmatrix}, b^T \cdot A^T = (25 \quad 25 \quad 43 \quad 38), c \cdot A \text{ nicht möglich}$

b) linear unabhängig

3. Ein Unternehmen plant, in 15 Jahren eine neue Produktionsmaschine anzuschaffen. Daher beginnt es mit der Bildung von Rücklagen. Im ersten Jahr ($t = 1$) werden € 5.000.- für diesen Zweck zurückgelegt. Aufgrund steigender Gewinne wird der Betrag, der in den folgenden Jahren zurückgelegt wird, jährlich um € 500.- erhöht.
- a) (2 Punkte) Geben Sie eine explizite Formel für a_n , den jährlichen Rücklagebetrag im Jahr n , an und berechnen Sie damit den Rücklagebetrag im 15. Jahr.
 - b) (2 Punkte) Berechnen Sie die Gesamtsumme der Rücklagen, die bis zum Ende des 15. Jahres gebildet wurden.
 - c) (4 Punkte) Alternativ überlegt das Unternehmen, jeweils am Beginn eines Jahres, einen Betrag in Höhe von € 2.000.- zu einem Zinssatz von 4 % p.a. anzulegen. Wie hoch ist der Wert aller Einzahlungen nach fünfzehn Jahren?
 - d) (3 Punkte) (Unabhängig von a), b) und c)) Eine andere Bank bietet an, einen Anfangsbetrag in der Höhe von € 30.000.- so zu verzinsen, dass sich der Betrag jedes Jahr um den Faktor 1,03 erhöht. Nach wie vielen vollen Jahren übersteigt dann das Kapital erstmals € 40.000?

Ausführung Beispiel 3:

Ausführung Beispiel 3:

Lösung:

a) $a_n = 5000 + (n - 1) \cdot 500$; $a_{15} = 12.000$

b) $s_{15} = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{15}{2}(5000 + 7000) = 127.500$

c) 41.649,06

d) Nach 10 vollen Jahren.

4. Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = e^{2x} - a \cdot x$$

mit einem reellen Parameter a .

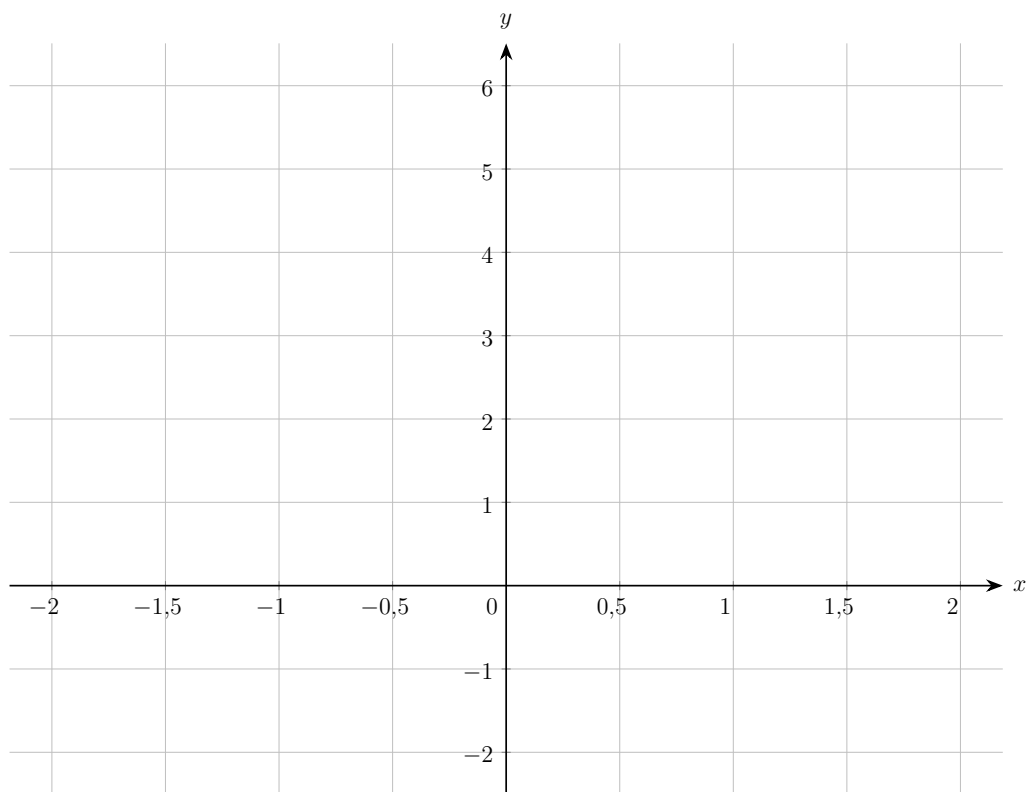
- a) (4 Punkte) Für welche $a \in \mathbb{R}$ besitzt die Funktion f ein Extremum?
- b) Setzen Sie nun $a = 2$.
 - i. (4 Punkte) Berechnen Sie die Koordinaten des Extremums. Handelt es sich um ein Maximum oder um ein Minimum? Begründen Sie!
 - ii. (2 Punkte) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion für $-2 \leq x \leq 1$ in nebenstehendes Koordinatensystem.
 - iii. (3 Punkte) Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^1 (e^{2x} - 2x) dx$$

und erklären Sie die Bedeutung des Integrals anhand Ihrer Skizze.

Ausführung Beispiel 4:

Ausführung Beispiel 4:

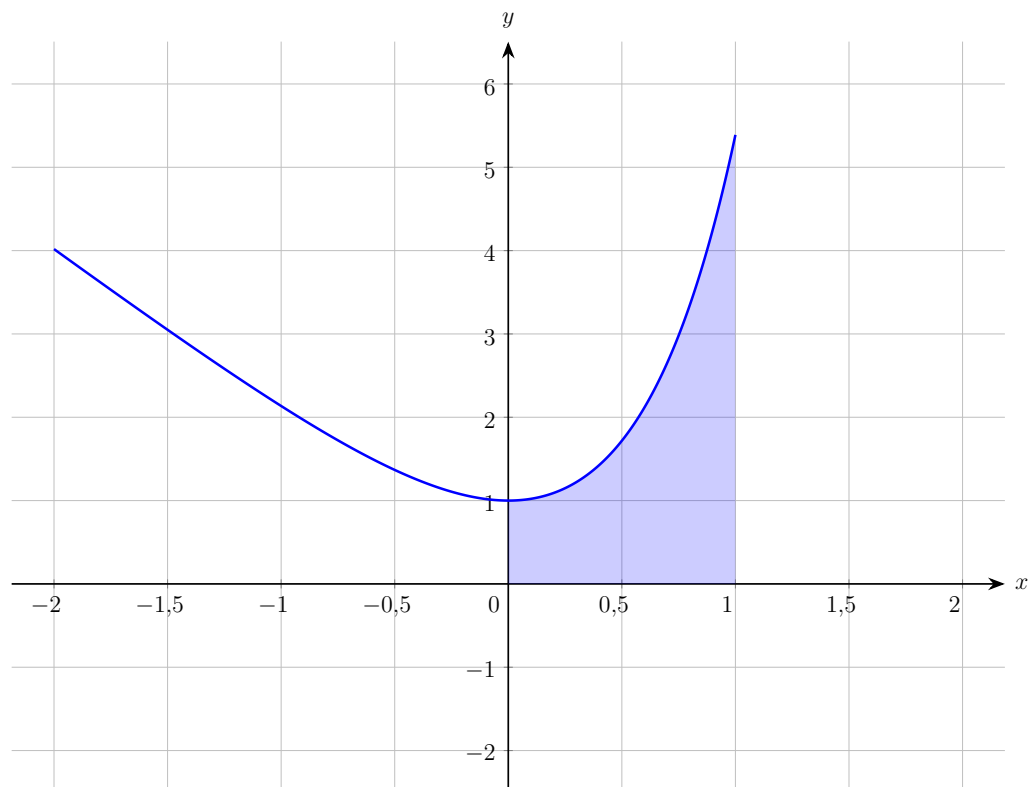


Lösung:

a) $a > 0$

b) i. Minimum $(0, 1)$

ii.

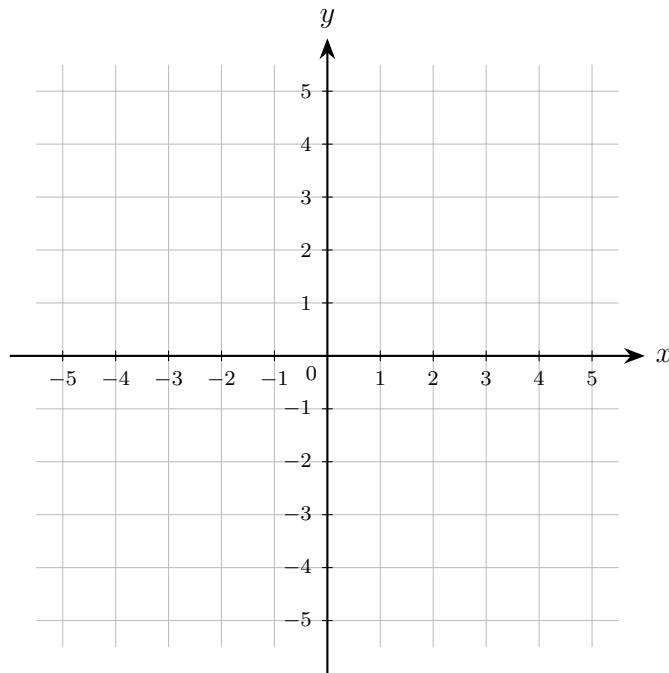


iii. $\frac{1}{2}e^2 - \frac{3}{2} \approx 2,19$

5. Gegeben ist die Funktion

$$f(x, y) = \ln(1 + x^2 + y) - 2y.$$

- a) (3 Punkte) Zeichnen Sie die größtmögliche Definitionsmenge $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ in das untenstehende Koordinatensystem ein. Ist die Menge D konvex?
- b) (4 Punkte) Bestimmen Sie alle stationären Stellen der Funktion f .
- c) (6 Punkte) Stellen Sie fest, ob es sich dabei um ein Maximum, ein Minimum oder eine Sattelstelle handelt. Verwenden Sie dabei $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = \frac{-2x}{(1 + x^2 + y)^2}$



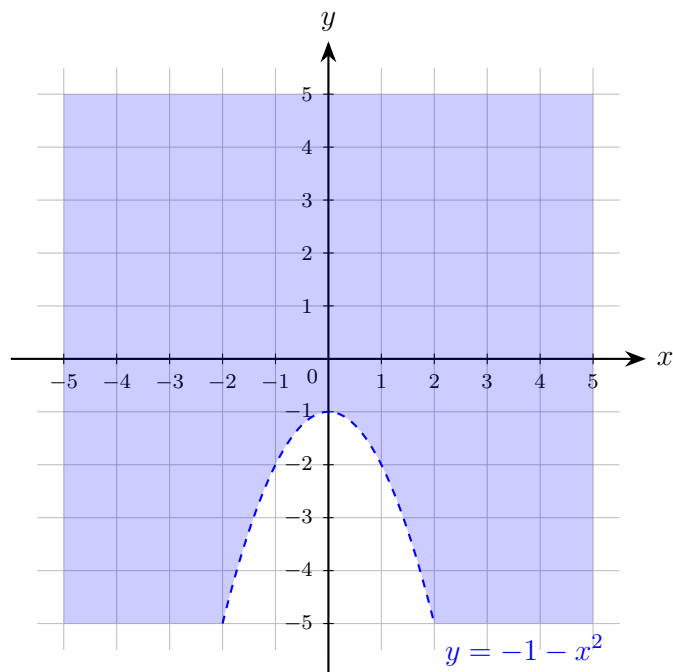
Ausführung Beispiel 5:

Ausführung Beispiel 5:

Lösung:

a)

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > -x^2 - 1\}$$



Die Menge D ist nicht konvex.

b) Stationäre Stelle $P = \left(0, -\frac{1}{2}\right)$.

c) P ist eine Sattelstelle.