

Klausur Wirtschaftsmathematik VO

14. März 2025

Bitte leserlich in Druckbuchstaben ausfüllen!

NACHNAME:	
VORNAME:	
MATRIKELNUMMER:	

ERLAUBT: Formelsammlung des Instituts, Taschenrechner laut Liste!

VERBOTEN: **Handy** und **Smartwatch** am Arbeitsplatz!

Lösungswege müssen nachvollziehbar angegeben werden!

Aufgabe	max. Punkte	erreichte Punkte
1	12	
2	12	
3	12	
4	12	
5	12	
Summe	60	
Note:		

1. a) (6 Punkte) Bestimmen Sie für die folgende Gleichung

$$\frac{1}{2x-3} = \frac{1}{\sqrt{33-16x}}$$

den Definitionsbereich und die Lösungsmenge.

- b) (6 Punkte) Eine Umfrage zum Mobilitätsverhalten unter 100 Personen hat folgende Ergebnisse geliefert:

- 8 Befragte besitzen ein Motorrad, 20 besitzen ein Auto und 48 besitzen ein Fahrrad.
- 38 Teilnehmende der Umfrage besitzen gar kein Fahrzeug.
- Von den Befragten besitzt niemand sowohl ein Motorrad als auch ein Auto.

Wie viele Personen aus der Umfrage besitzen zusätzlich zu einem Fahrrad noch ein weiteres motorisiertes Fortbewegungsmittel? Lösen Sie die Aufgabe und veranschaulichen Sie Ihre Lösung mit einem Venn-Diagramm.

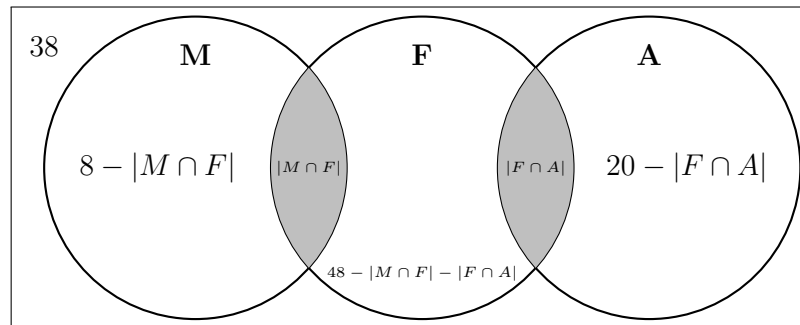
Ausführung Beispiel 1:

Ausführung Beispiel 1:

Lösung:

a) $D = \left(-\infty, \frac{33}{16}\right) \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}; L = \{2, -3\}$

- b) 14 Personen besitzen zusätzlich zu einem Fahrrad auch ein weiteres motorisiertes Fortbewegungsmittel (Auto oder Motorrad).



2. a) (4 Punkte) Gegeben sind die regulären $n \times n$ Matrizen A, B, C und X . Lösen Sie die Matrixgleichung

$$AXB - XB + (B^T C)^T = C^{-1} B$$

nach der Matrix X auf. Welche Bedingung muss dabei noch gelten?

- b) Gegeben sind nun die Matrizen M und N sowie der Vektor u wie folgt:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad u = \begin{pmatrix} 1 & t \end{pmatrix}$$

- i. (4 Punkte) Bestimmen Sie alle $t \in \mathbb{R}$ für die $M \cdot u^T$ die Länge 4 hat.
- ii. (4 Punkte) Auf welchen Wert muss das Element m_{21} der Matrix M geändert werden, sodass $M \cdot N = N \cdot M$ gilt?

Ausführung Beispiel 2:

Ausführung Beispiel 2:

Lösung:

a) $X = (A - E)^{-1}(C^{-1} - C^T)$; Bedingung: $(A - E)$ ist invertierbar.

b)

i. $t_1 = \frac{1}{2}, t_2 = -\frac{11}{10}$

ii. $m_{21} = 0$

3. a) (6 Punkte) Ein junges Paar schaffte sich eine Eigentumswohnung um 300.000 Euro an und nahm dazu einen Kredit auf. Dieser begann mit 1.1.2025 zu laufen. Dieser Kredit soll am Ende jeden Jahres 20 Jahre lang durch eine gleichbleibende Rate R zurückgezahlt werden. Berechnen Sie R , wenn man von einem kalkulatorischen Jahreszinssatz von fünf Prozent ausgeht!

Fertigen Sie eine graphische Darstellung der Zahlungsströme an und berechnen Sie die Lösung unter Verwendung einer geeigneten Summenformel.

- b) (6 Punkte) (unabhängig von a)) Am Ende eines Jahres soll ein Betrag in Höhe von 24.000 Euro angespart werden. Dazu wird an jedem Monatsende eines Jahres ein gleichbleibender Betrag A auf ein Sparbuch eingezahlt. Wie groß muss dieser Betrag A sein, wenn man weiterhin von einem kalkulatorischen Jahreszins von fünf Prozent ausgeht?

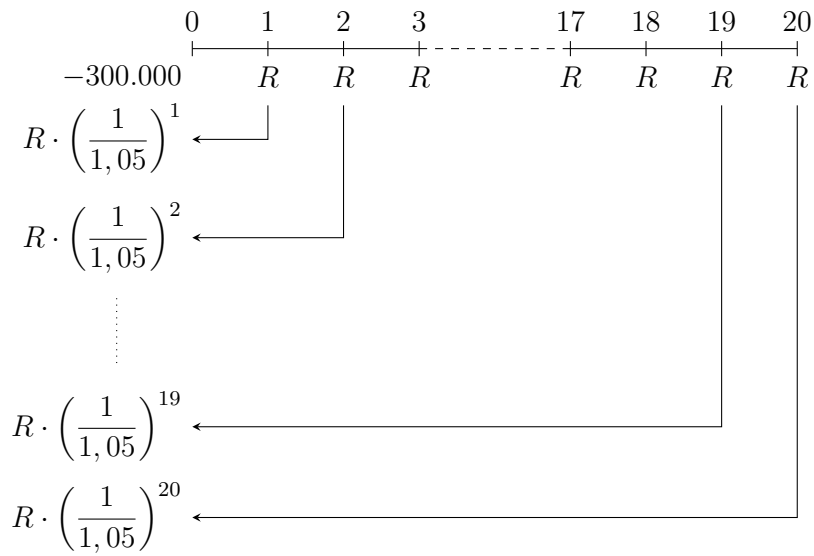
Fertigen Sie eine graphische Darstellung der Zahlungsströme an und berechnen Sie die Lösung unter Verwendung einer geeigneten Summenformel.

Ausführung Beispiel 3:

Ausführung Beispiel 3:

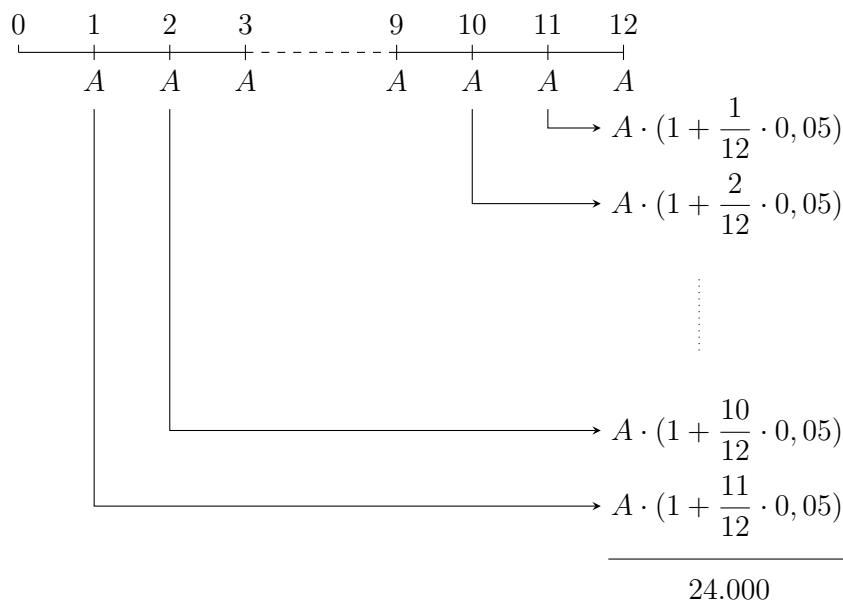
Lösung:

a)



$$R = 24.072,78$$

b)



$$A = 1.955,19$$

4. Für ein Produkt ist die Nachfragemenge x in Abhängigkeit vom Verkaufspreis p gegeben durch:

$$x = n(p) = \frac{16}{p-1} \quad 2 \leq p < 17$$

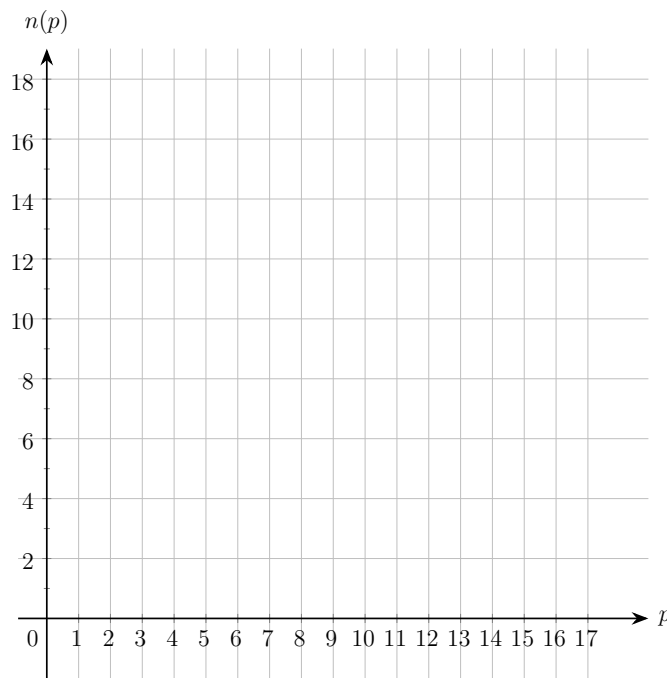
Die Gesamtkosten für die Produktion von x Einheiten des Produktes können durch die Funktion

$$K(x) = 4 + 2x - 4 \cdot \sqrt{x}$$

beschrieben werden.

- (2 Punkte) Skizzieren Sie die Nachfragefunktion über ihrem Definitionsbereich in nachstehendes Koordinatensystem.
- (2 Punkte) Bestimmen Sie die Preis-Absatz-Funktion.
- (8 Punkte) Für welche Produktionsmenge wird der Gewinn maximal (Nachweis!)? Ermitteln Sie den zugehörigen Preis, sowie den maximalen Gewinn.

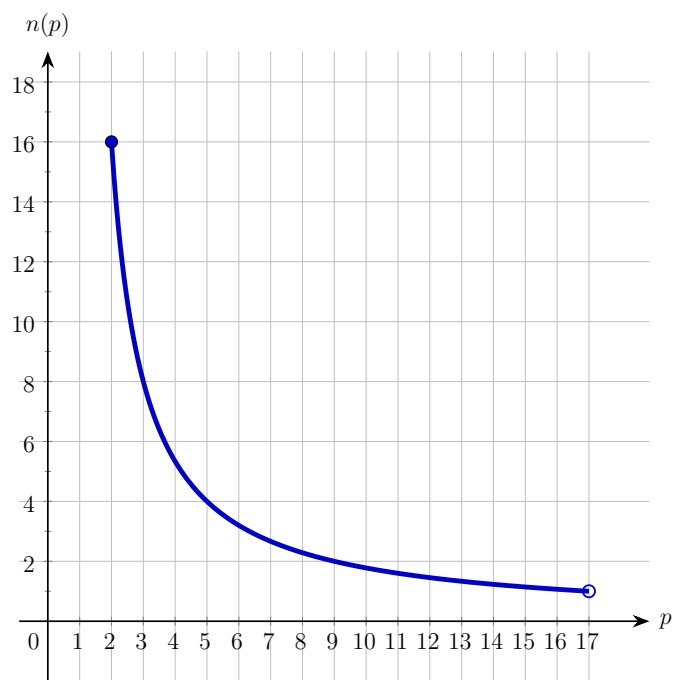
Ausführung Beispiel 4:



Ausführung Beispiel 4:

Lösung:

a) $D = [2; 17[$



b) $p(x) = \frac{16}{x} + 1$

c) $E(x) = 16 + x$; $G(x) = 12 - x + 4 \cdot \sqrt{x}$; $x^* = 4$; $p^* = 5$; $G_{max} = 16$

5. Ein Unternehmen produziert zwei Produkte (A und B). Die Variable x beschreibt die produzierten Mengeneinheiten von Produkt A und y die produzierten Mengeneinheiten von Produkt B . Ein ökonomischer Zusammenhang zwischen den produzierten Mengeneinheiten kann mit der Funktion

$$f(x, y) = -2x^2 + 4xy - 3y^2 + 40x + 60y - 3$$

beschrieben werden.

- a) (1 Punkt) Bestimmen Sie einen sinnvollen Definitionsbereich für f .
- b) (4 Punkte) Bestimmen Sie die Koordinaten (x_P, y_P) der stationären Stelle $P(x_P, y_P)$.
- c) (2 Punkte) Bestimmen Sie die Hesse Matrix von f .
- d) (3 Punkte) Verwenden Sie nun für die Hesse Matrix von f im Punkt P in jedem Fall die Matrix

$$H(x_P, y_P) = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$$

Um welche ökonomische Funktion könnte es sich bei f handeln?

- i. Kostenfunktion
- ii. Erlösfunktion
- iii. Gewinnfunktion

Begründen Sie mit Hilfe von $H(x_P, y_P)$, beziehungsweise der Funktionsgleichung $f(x, y)$.

- e) (2 Punkte) Bestimmen Sie die Länge des Gradienten im Punkt P , und begründen Sie das Ergebnis.

Ausführung Beispiel 5:

Ausführung Beispiel 5:

Lösung:

a) $D_f = \mathbb{R}_+^2$

b) $(x_P, y_P) = (60, 50)$

c) $H(x_P, y_P) = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$

d) $\det(H) > 0, f_{xx} < 0 \Rightarrow f$ hat Maximum in P . Es könnte sich daher um eine Gewinnfunktion handeln.

e) 0 weil P eine Maximalstelle ist.