

Klausur Wirtschaftsmathematik VO

5. Februar 2025

Bitte leserlich in Druckbuchstaben ausfüllen!

NACHNAME:	
VORNAME:	
MATRIKELNUMMER:	

ERLAUBT: Formelsammlung des Instituts, Taschenrechner laut Liste!

VERBOTEN: **Handy** und **Smartwatch** am Arbeitsplatz!

Lösungswege müssen nachvollziehbar angegeben werden!

Aufgabe	max. Punkte	erreichte Punkte
1	12	
2	12	
3	12	
4	12	
5	12	
Summe	60	
Note:		

1. a) (8 Punkte) Erstellen Sie jeweils für die folgenden Situationen ein Venn-Diagramm für drei nicht-leere Mengen A , B und C , wobei die Mengen immer paarweise verschieden sind.
- i. $A \subset B \subset C$
 - ii. $A \subset B$ und $C \cap B \neq \{\}$ und $C \cap A = \{\}$
 - iii. $(A \cup B) \subset C$ und $\bar{A} \cap B = \{\}$
 - iv. $|A \cup B| = |A| + |B|$ und $(A \setminus C) = A$ und $(C \setminus B) \neq \{\}$ und $|B \cap C| < |B|$
- b) (4 Punkte) Bestimmen Sie die größtmögliche Definitionsmenge $D \subseteq \mathbb{R}$ und lösen Sie die folgende Ungleichung:

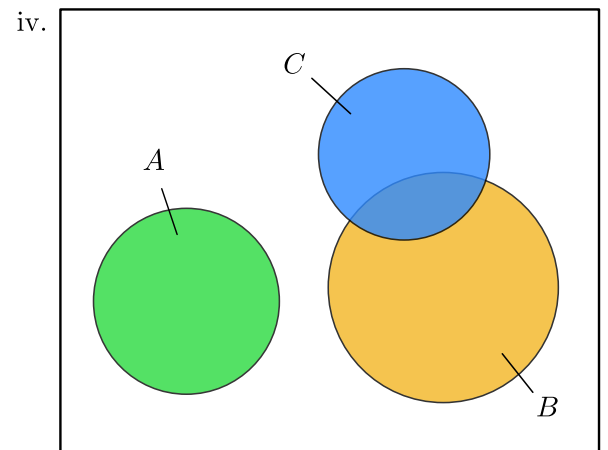
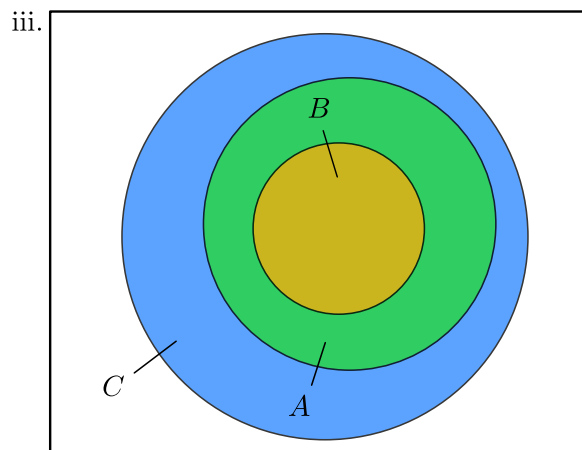
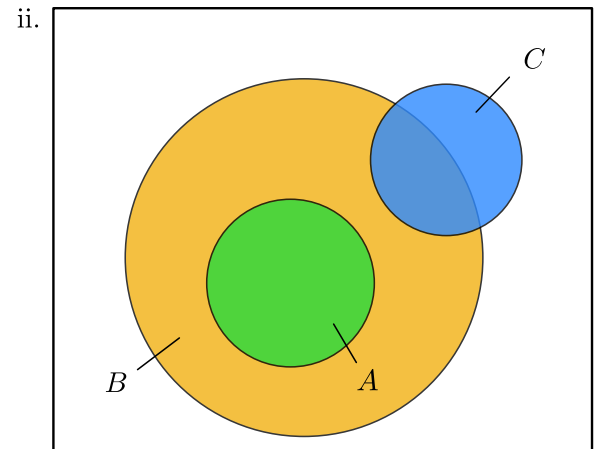
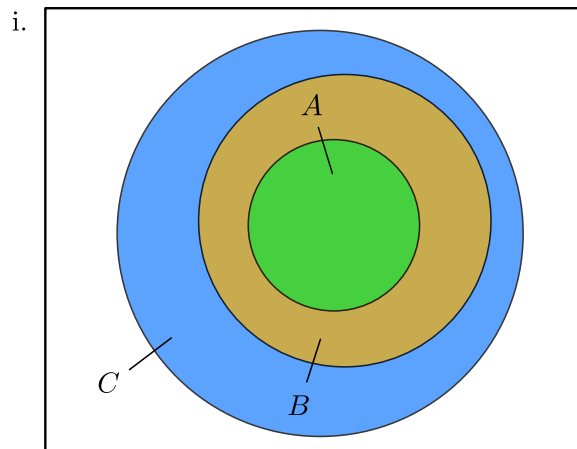
$$\frac{5}{|x^2 + 1|} < 1$$

Ausführung Beispiel 1:

Ausführung Beispiel 1:

Lösung:

a)



b) $D = \mathbb{R}$;

$$\frac{5}{|x^2 + 1|} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad 4 < x^2 \quad \Leftrightarrow \quad x \in]-\infty; -2[\cup]2; \infty[$$

2. Gegeben ist die Matrix A und der Vektor b :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & \lambda \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} \mu \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

- a) (5 Punkte) Für welche Koeffizienten λ, μ ist das lineare Gleichungssystem $A \cdot x = b$ *unlösbar*?
- b) (5 Punkte) Bestimmen Sie alle Lösungen des linearen Gleichungssystems $A \cdot x = b$ für $\lambda = -1$ und $\mu = 3$. Geben Sie dann eine (beliebige) Lösung dieses Systems an, in der alle Komponenten größer als Null sind.
- c) (2 Punkte) Sind die drei Spaltenvektoren der Matrix A für $\lambda = 0$ linear unabhängig? Begründen Sie!

Ausführung Beispiel 2:

Ausführung Beispiel 2:

Lösung:

a) Stufenform:
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \mu \\ 0 & -1 & 2 & 4 - \mu \\ 0 & 0 & \lambda + 1 & -3 + \mu \end{pmatrix}$$

Daher: System unlösbar für $\lambda = -1$ und $\mu \neq 3$

b)
$$X = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; t \in \mathbb{R}; \text{ z.B. für } t = 1: X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c) Ja, da für $\lambda = 0$ gilt: $\text{Rg}(A) = 3$

3. a) (5 Punkte) Untersuchen Sie die durch ihr Bildungsgesetz angegebene Folge auf Monotonie und berechnen Sie mit Hilfe der Grenzwertrechenregeln den Grenzwert falls er existiert:

$$a_n = \frac{n^2 + 1}{2n^2}, \quad n \in \mathbf{N}$$

- b) (7 Punkte) Frau L. legt 1.000 Euro am 01.01.2025 auf ein mit 5 % p.a. verzinstes Konto.
- Geben Sie eine Formel an, die den Wert dieser Einzahlung nach n Jahren angibt.
 - Sie plant ein Jahr nach der Einzahlung jährlich 100 Euro abzuheben. Geben Sie eine Formel an, die den Wert aller Auszahlungen nach n Jahren (also n Auszahlungen) angibt.
 - Geben Sie die allgemeine Formel für das Kontoguthaben K_n nach n Jahren an.
 - Bestimmen Sie, ob und wenn ja, nach wie vielen Jahren das Konto leer ist.

Ausführung Beispiel 3:



Ausführung Beispiel 3:

Lösung:

a) a_n streng monoton fallend; $a = \frac{1}{2}$

b)

i. $E_n = 1000 \cdot 1,05^n$

ii. $A_n = 100 \cdot \frac{1 - 1,05^n}{1 - 1,05}$

iii. $K_n = 1000 \cdot 1,05^n - 100 \cdot \frac{1 - 1,05^n}{1 - 1,05} = 2000 - 1000 \cdot 1,05^n$

iv. $K_n = 0 \Leftrightarrow 1,05^n = 2 \Leftrightarrow n \approx 14,21$. Das Konto ist nach 15 Jahren leer.

4. Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = (2x + 1) \cdot e^{x^2+x}$$

- a) (2 Punkte) Bestimmen Sie die größtmögliche Definitionsmenge $D \subseteq \mathbb{R}$ und alle Nullstellen der Funktion $f(x)$.
- b) (6 Punkte) Berechnen Sie – sofern vorhanden – alle stationären Stellen der Funktion f .
- c) (4 Punkte) Berechnen Sie

$$\int f(x) dx$$

Ausführung Beispiel 4:

Ausführung Beispiel 4:

Lösung:

- a) $D = \mathbb{R}$; Nullstellen: $x = -\frac{1}{2}$
- b) keine stationäre Stellen
- c) $F(x) = e^{x^2+x} + C$

5. Gegeben ist eine Produktionsfunktion f mit den Faktoreinsatzmengen Arbeit und Kapital durch

$$f(A, K) = (2A^{\frac{1}{2}} + 3K^{\frac{1}{2}})^2$$

- a) (4 Punkte) Ist diese Funktion homogen? Bestimmen Sie gegebenenfalls den Homogenitätsgrad.
- b) (3 Punkte) Zurzeit werden 16 Einheiten Kapital eingesetzt. Wie viele Einheiten Arbeit müssen dann eingesetzt werden, um eine Outputmenge von 676 zu erzielen?
- c) (5 Punkte) Es werden nun $A = 4$ und $K = 9$ eingesetzt. Um wieviel Prozent ändert sich das Produktionsniveau näherungsweise, wenn der Faktor A um 2 % erhöht wird?

Ausführung Beispiel 5:

Ausführung Beispiel 5:

Lösung:

a) Homogen von Grad 1.

b) 49

c) $\varepsilon = \frac{4}{13} \approx 0,30769 \%$, daher näherungsweise Änderung um $2 \cdot 0,30769 = 0,615 \%$