Klausur Wirtschaftsmathematik VO

5. Februar 2025

Bitte leserlich in Druckbuchstaben ausfüllen!

NACHNAME:	
VORNAME:	
MATRIKELNUMMER:	

ERLAUBT: Formelsammlung des Instituts, Taschenrechner laut Liste!

VERBOTEN: **Handy** und **Smartwatch** am Arbeitsplatz!

Lösungswege müssen nachvollziehbar angegeben werden!

Aufgabe	**max. Punkte**	**erreichte Punkte**
1	12	
2	12	
3	12	
4	12	
5	12	
Summe	**60**	
Note:		

1. a) (8 Punkte) Erstellen Sie jeweils für die folgenden Situationen ein Venn-Diagramm für drei nicht-leere Mengen A, B und C, wobei die Mengen immer paarweise verschieden sind.

   i. $A \subset B \subset C$

   ii. $A \subset B$ und $C \cap B \neq \{\,\}$ und $C \cap A = \{\,\}$

   iii. $(A \cup B) \subset C$ und $\bar{A} \cap B = \{\}$

   iv. $|A \cup B| = |A| + |B|$ und $(A \setminus C) = A$ und $(C \setminus B) \neq \{\,\}$ und $|B \cap C| < |B|$

   b) (4 Punkte) Bestimmen Sie die größtmögliche Definitionsmenge $D \subseteq \mathbb{R}$ und lösen Sie die folgende Ungleichung:

$$\frac{5}{|x^2+1|} < 1$$

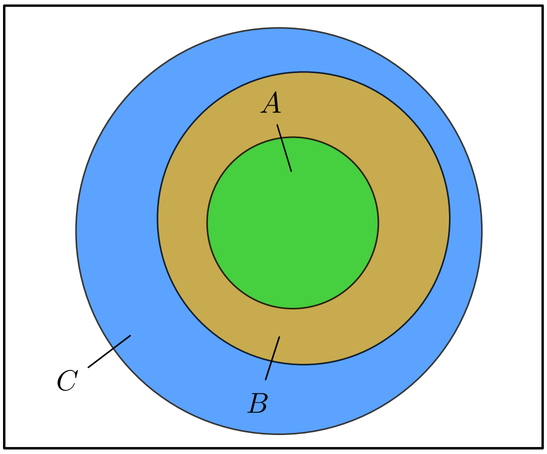
Ausführung Beispiel 1:

Ausführung Beispiel 1:

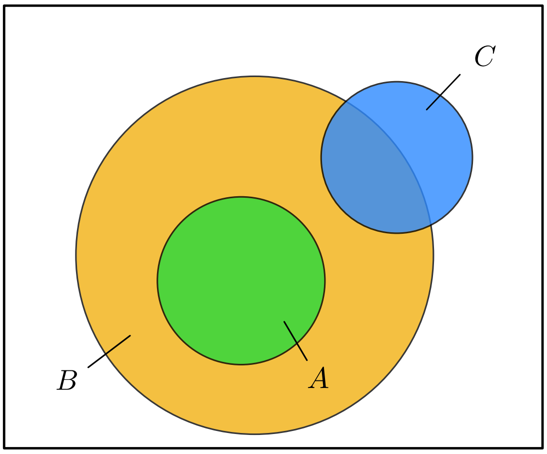
Lösung:

a)

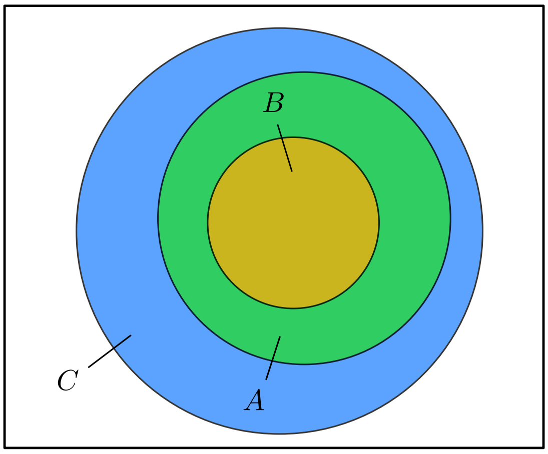
i.



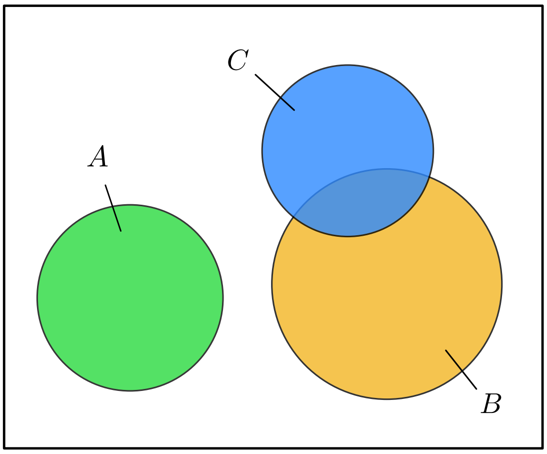
ii.



iii.



iv.



b) $D = \mathbb{R}$;

$$\frac{5}{|x^2+1|} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad 4 < x^2 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \,]-\infty; -2[\, \cup \,]2; \infty[$$

2. Gegeben ist die Matrix A und der Vektor b:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & \lambda \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} \mu \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad \lambda,\, \mu \in \mathbb{R}$$

a) (5 Punkte) Für welche Koeffizienten λ, μ ist das lineare Gleichungssystem $A \cdot x = b$ *unlösbar*?

b) (5 Punkte) Bestimmen Sie alle Lösungen des linearen Gleichungssystems $A \cdot x = b$ für $\lambda = -1$ und $\mu = 3$. Geben Sie dann eine (beliebige) Lösung dieses Systems an, in der alle Komponenten größer als Null sind.

c) (2 Punkte) Sind die drei Spaltenvektoren der Matrix A für $\lambda = 0$ linear unabhängig? Begründen Sie!

Ausführung Beispiel 2:

Ausführung Beispiel 2:

Lösung:

a) Stufenform: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \mu \\ 0 & -1 & 2 & 4-\mu \\ 0 & 0 & \lambda+1 & -3+\mu \end{pmatrix}$

Daher: System unlösbar für $\lambda = -1$ und $\mu \neq 3$

b) $X = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $t \in \mathbb{R}$; z.B. für t = 1: $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) Ja, da für $\lambda = 0$ gilt: $Rg\,(A) = 3$

3. a) (5 Punkte) Untersuchen Sie die durch ihr Bildungsgesetz angegebene Folge auf Monotonie und berechnen Sie mit Hilfe der Grenzwertrechenregeln den Grenzwert falls er existiert:

$$a_n = \frac{n^2 + 1}{2n^2}, \quad n \in \mathbf{N}$$

b) (7 Punkte) Frau L. legt 1.000 Euro am 01.01.2025 auf ein mit 5 % p.a. verzinstes Konto.

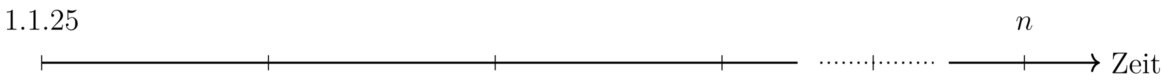
i. Geben Sie eine Formel an, die den Wert dieser Einzahlung nach n Jahren angibt.

ii. Sie plant ein Jahr nach der Einzahlung jährlich 100 Euro abzuheben. Geben Sie eine Formel an, die den Wert aller Auszahlungen nach n Jahren (also n Auszahlungen) angibt.

iii. Geben Sie die allgemeine Formel für das Kontoguthaben K_n nach n Jahren an.

iv. Bestimmen Sie, ob und wenn ja, nach wie vielen Jahren das Konto leer ist.

Ausführung Beispiel 3:



Ausführung Beispiel 3:

Lösung:

a) a_n streng monoton fallend; $a = \frac{1}{2}$

b)

i. $E_n = 1000 \cdot 1,05^n$

ii. $A_n = 100 \cdot \frac{1 - 1,05^n}{1 - 1,05}$

iii. $K_n = 1000 \cdot 1,05^n - 100 \cdot \frac{1 - 1,05^n}{1 - 1,05} = 2000 - 1000 \cdot 1,05^n$

iv. $K_n = 0 \Leftrightarrow 1,05^n = 2 \Leftrightarrow n \approx 14,21$. Das Konto ist nach 15 Jahren leer.

4. Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = (2x+1) \cdot e^{x^2+x}$$

a) (2 Punkte) Bestimmen Sie die größtmögliche Definitionsmenge $D \subseteq \mathbb{R}$ und alle Nullstellen der Funktion $f(x)$.

b) (6 Punkte) Berechnen Sie – sofern vorhanden – alle stationären Stellen der Funktion f.

c) (4 Punkte) Berechnen Sie

$$\int f\,(x)\,dx$$

Ausführung Beispiel 4:

Ausführung Beispiel 4:

Lösung:

a) $D = \mathbb{R}$; Nullstellen: $x = -\frac{1}{2}$

b) keine stationäre Stellen

c) $F(x) = e^{x^2+x} + C$

5. Gegeben ist eine Produktionsfunktion f mit den Faktoreinsatzmengen Arbeit und Kapital durch

$$f(A, K) = (2A^{\frac{1}{2}} + 3K^{\frac{1}{2}})^2$$

a) (4 Punkte) Ist diese Funktion homogen? Bestimmen Sie gegebenenfalls den Homogenitätsgrad.

b) (3 Punkte) Zurzeit werden 16 Einheiten Kapital eingesetzt. Wie viele Einheiten Arbeit müssen dann eingesetzt werden, um eine Outputmenge von 676 zu erzielen?

c) (5 Punkte) Es werden nun $A = 4$ und $K = 9$ eingesetzt. Um wieviel Prozent ändert sich das Produktionsniveau näherungsweise, wenn der Faktor A um $2\,\%$ erhöht wird?

Ausführung Beispiel 5:

Ausführung Beispiel 5:

Lösung:

a) Homogen von Grad 1.

b) 49

c) $\varepsilon = \frac{4}{13} \approx 0,308$ %