Klausur Wirtschaftsmathematik VO

24. September 2024

Bitte leserlich in Druckbuchstaben ausfüllen!

NACHNAME:	
VORNAME:	
MATRIKELNUMMER:	

ERLAUBT: **nur** die Formelsammlung des Instituts!

VERBOTEN: **Taschenrechner** und **Handys** am Arbeitsplatz!

Lösungswege müssen nachvollziehbar angegeben werden!

Aufgabe	**max. Punkte**	**erreichte Punkte**
1	12	
2	12	
3	12	
4	12	
5	12	
Summe	**60**	
Note:		

1. a) (7 Punkte) Lösen Sie die folgende Ungleichung und geben Sie die Lösungsmenge über $\mathbb{R}$ an!

$$\frac{5}{x-4} \leq x$$

b) Gegeben sind die Mengen A und B mit

$$A = \{a \in \mathbb{N} \mid a^2 \leq 9\} \quad \text{und} \quad B = \{b \in \mathbb{Z} \mid b^2 > 0 \land |b| < 3\}$$

i. (3 Punkte) Geben Sie die Mengen in aufzählender Form an.

ii. (2 Punkte) Bestimmen Sie $A \triangle B$.

Ausführung Beispiel 1:

Ausführung Beispiel 1:

Lösung:

a) $[-1, 4[\cup[5; \infty[$

b) i. $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{-2, -1, 1, 2\}$

   ii. $A \triangle B = \{-2, -1, 3\}$

2. Gegeben sind die Matrizen A, B, C und D, wobei C eine 3×3-Matrix ist:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -t \\ t & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ t & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

a) (4 Punkte) Berechnen Sie, wenn möglich, $A \cdot B$ und $(2 \cdot B - A)^T$.

b) (3 Punkte) Ergänzen Sie die letzte Zeile der Matrix C so, dass C symmetrisch ist und $det\,(C) = -8$ gilt.

c) (2 Punkte) Für eine Matrix M gilt: $M \cdot M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Geben Sie den Rang von M an. Begründen Sie!

d) (3 Punkte) Bestimmen Sie alle Lösungen des Gleichungssystems

$$D \cdot x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Ausführung Beispiel 2:

Ausführung Beispiel 2:

Lösung:

a) $A \cdot B$ nicht möglich; $(2 \cdot B - A)^T = \begin{pmatrix} -2 & 2t-1 & -2-t \\ 2 & t & 5 \end{pmatrix}$

b) $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

c) da M eine 3×3-Matrix und invertierbar ist, gilt $rg\,(M) = 3$

d) keine Lösung

3. a) (7 Punkte) Gegeben ist die Folge

$$a_n = 1 + \frac{n+2}{n!}$$

i. Beweisen Sie, dass die Folge a_n streng monoton fallend ist.
ii. Beweisen Sie, dass 1 eine untere Schranke ist.
iii. Geben Sie eine obere Schranke an und begründen Sie Ihre Wahl.
iv. Was können Sie über die Konvergenz der Folge a_n aussagen? Begründen Sie.

b) (5 Punkte) Untersuchen Sie die folgende Reihe auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls Ihren Grenzwert:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{3n-1}}{3^{2n}}$$

Ausführung Beispiel 3:

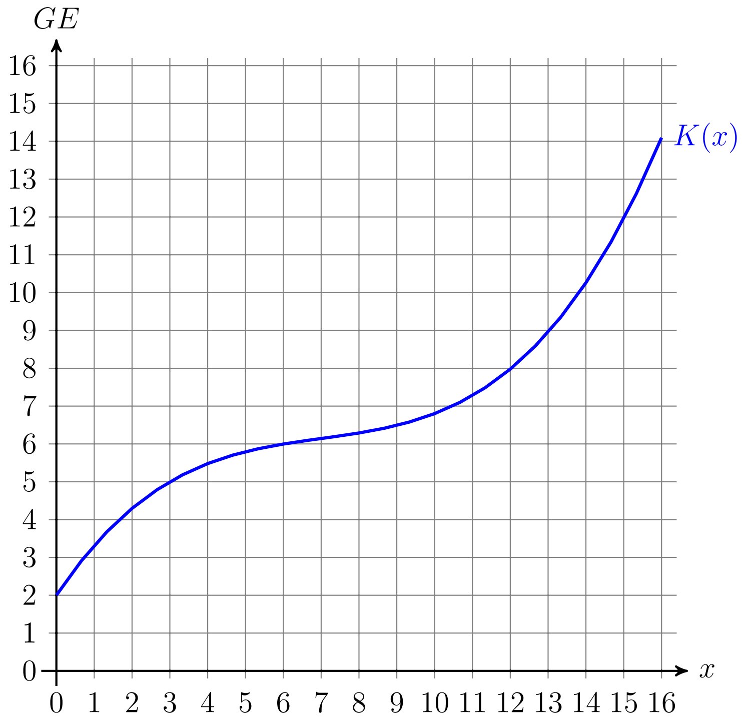
Ausführung Beispiel 3:

Lösung:

a)
   i. $a_n > a_{n+1} \Leftrightarrow 1 + \frac{n+2}{n!} < 1 + \frac{(n+1)+2}{(n+1)!}$
   ii. $1 + \frac{n+2}{n!} > 1 \Leftrightarrow \frac{n+2}{n!} > 0$
   iii. z. B. $M = a_1 = 4$, a_n ist streng monoton fallend, daher ist a_1 eine obere Schranke.
   iv. (streng) monoton fallend und nach unten beschränkt (z.B. durch 1), daher konvergent.

b) geometrische Reihe mit $q = \frac{8}{9}$;konvergent, Grenzwert ist 4.

4. Ein Betrieb hat die in der folgenden Graphik gegebene Kostenfunktion:



a) (5 Punkte) Lesen Sie die zur Beantwortung der folgenden Fragen notwendigen Informationen direkt aus der Graphik ab und *begründen* Sie jeweils Ihre Antwort!

   i. Sind die Grenzkosten bei einer Produktionsmenge von 3 oder 6 Mengeneinheiten größer?

   ii. Lesen Sie näherungsweise die Produktionsmenge ab, für die der Betrieb die geringsten Grenzkosten hat.

   iii. Sind die Stückkosten (Durchschnittskosten) bei einer Produktionsmenge von 3 oder 6 Mengeneinheiten größer?

b) (3 Punkte) Der Betrieb ist ein Monopolbetrieb und hat die folgende Preis-Absatz-Funktion:

$$p(x) = 12 - \frac{x^2}{12}$$

Geben Sie einen ökonomisch sinnvollen Definitionsbereich an und skizzieren Sie diese Funktion im obigen Koordinatensystem.

c) (4 Punkte) Geben Sie die Erlösfunktion an und berechnen Sie, ab welcher Produktionsmenge der Grenzerlös kleiner als 8 ist.

Ausführung Beispiel 4:

Ausführung Beispiel 4:

Lösung:

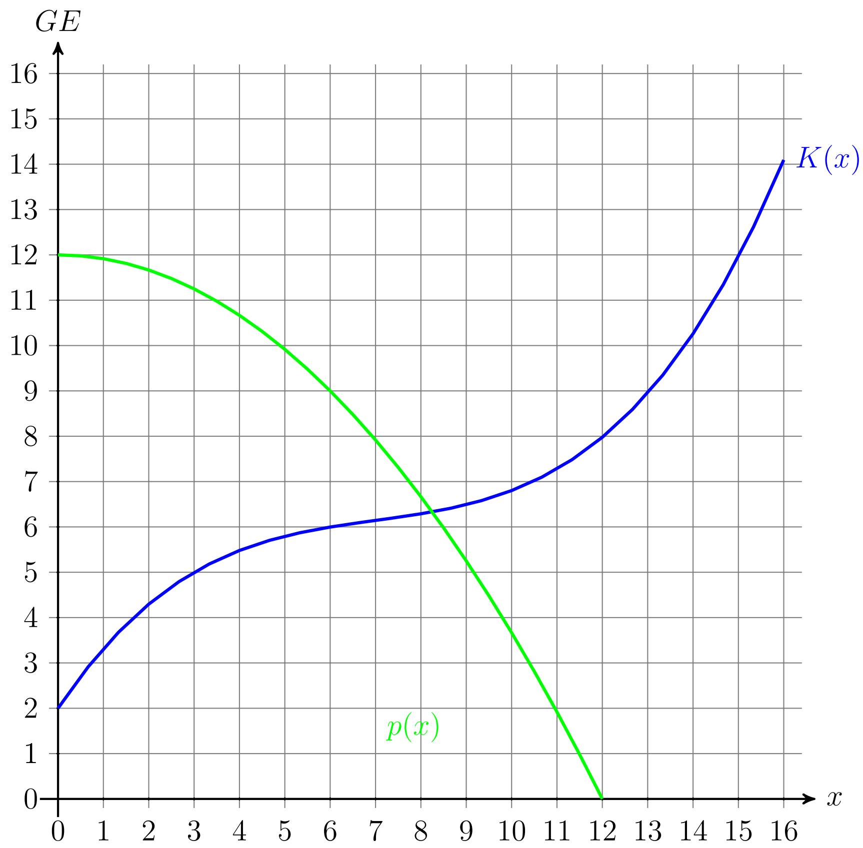
a)

i. $K'(3) > K'(6)$, Grenzkosten bei drei ME größer als bei sechs ME

ii. geringste Steigung im Wendepunkt; $K''(7) = 0$ daher für $x = 7$ ME

iii. $\frac{K(6)}{6} = 1 < \frac{K(3)}{3} = \frac{5}{3}$, Stückkosten bei 3 ME größer

b) $D = [0; 12]$



c) $E(x) = 12x - \frac{x^3}{12}$; $E'(x) < 8$; Ab $x = 4$ ME

5. Gegeben ist die Funktion $f(x, y)$ in den Variablen x und y:

$$f(x, y) = x^4 - 4x^2 + y^2 + 2xy$$

a) (4 Punkte) Untersuchen Sie f auf stationäre Stellen.

b) (2 Punkte) Wie lautet die Hesse Matrix?

c) (6 Punkte) Klassifizieren Sie nun die unter a) ermittelten stationären Stellen.

Ausführung Beispiel 5:

Ausführung Beispiel 5:

Lösung:

a) Stationäre Stellen: $(0,0)$; $(-\sqrt{\frac{5}{2}}, \sqrt{\frac{5}{2}})$; $(\sqrt{\frac{5}{2}}, -\sqrt{\frac{5}{2}})$

b) $H = \begin{pmatrix} 12x^2 - 8 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

c) Minima in $(-\sqrt{\frac{5}{2}}, \sqrt{\frac{5}{2}})$ und $(\sqrt{\frac{5}{2}}, -\sqrt{\frac{5}{2}})$, sowie Sattelpunkt in (0,0)