Klausur Wirtschaftsmathematik VO

04. Juli 2024

Bitte leserlich in Druckbuchstaben ausfüllen!

NACHNAME:	
VORNAME:	
MATRIKELNUMMER:	

ERLAUBT: **nur** die Formelsammlung des Instituts!

VERBOTEN: **Taschenrechner** und **Handys** am Arbeitsplatz!

Lösungswege müssen nachvollziehbar angegeben werden!

Aufgabe	**max. Punkte**	**erreichte Punkte**
1	12	
2	12	
3	12	
4	12	
5	12	
Summe	**60**	
Note:		

1. a) (2 Punkte) Die Mengen A und B sind definiert durch

$$A = \Big\{x \mid (x = 2n) \wedge (n \in \mathbb{N}_0)\Big\},$$
$$B = \Big\{y \mid (y = 2n + 1) \wedge (n \in \mathbb{N}_0)\Big\},$$

wobei $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Bestimmen Sie $A \cup B$ sowie $A \cap B$.

b) (4 Punkte) Zeichnen Sie die Menge $C \subset (A \times B)$ in untenstehendes Diagramm, wobei

$$C = \Big\{(x, y) \in (A \times B) \mid (x \leq 4) \wedge (y \leq 5)\Big\}.$$

Ist die Menge C konvex? Begründen Sie.

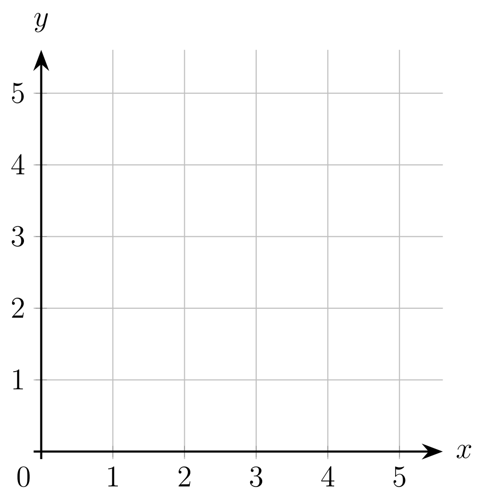
c) (3 Punkte) Lösen Sie die Summen auf und vereinfachen Sie so weit wie möglich:

$$\sum_{i=1}^{n} 2i - \sum_{j=1}^{n} (2j - 1) =$$

d) (3 Punkte) Bestimmen Sie die Lösungsmenge von

$$|x^2 + 1| \leq 5\,.$$

Ausführung Beispiel 1:

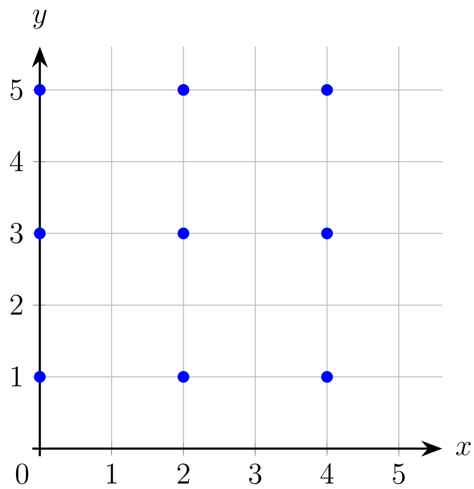


Ausführung Beispiel 1:

Lösung:

a) $A = \{0, 2, 4, \dots\} \dots$ Menge der geraden Zahlen,
$B = \{1, 3, 5, \dots\} \dots$ Menge der ungeraden Zahlen.
Daher $A \cup B = \mathbb{N}_0$, und $A \cap B = \emptyset$.

b) C ist nicht konvex.



c) n

d) $[-2; 2]$

2. Gegeben ist die Matrix A und ein Spaltenvektor b:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -a^2 \\ -1 & -3 & 16 \\ 1 & 3 & -2a^2+16 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) (4 Punkte) Bestimmen Sie den Rang der Matrix A in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$.

b) (2 Punkte) Für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ hat das homogene Gleichungssystem $Ax = 0$ nicht nur die triviale Lösung?

c) (6 Punkte) Setzen Sie nun $a = 2$ und bestimmen Sie damit alle Lösungen des Gleichungssystems $Ax = b$.

Ausführung Beispiel 2:

Ausführung Beispiel 2:

Lösung:

a) $r(A) = 1$ falls $a = \pm 4$ und sonst $r(A) = 2$.

b) Das homogene Gleichungssystem hat für alle reellen Werte von a unendlich viele Lösungen.

c) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 0 \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$

3. Eine Absolventin der Wirtschaftswissenschaften beginnt nach Abschluss ihres Studiums in einem Unternehmen halbtags zu arbeiten. Sie erhält im ersten Jahr 12 mal ein Nettomonatsgehalt von 1.000.- Euro. In den folgenden Jahren wird das Nettomonatsgehalt Jahr für Jahr erhöht. Sie erhält vom 2. Jahr bis einschließlich des 7. Jahres jährlich eine Erhöhung des Nettomonatsgehalts um 100 Euro. Ab dem 8. Jahr erhält sie jährlich einen um 25 % höheren Monatsbetrag als im jeweils vorhergehenden Jahr.

   a) (3 Punkte) Geben Sie eine Formel zur Berechnung des n-ten Nettomonatsgehalts in den ersten sieben Jahren an und berechnen Sie damit das Nettomonatsgehalt im 7. Jahr.

   b) (3 Punkte) Welchen Nettobetrag hat sie in den ersten sieben Jahren insgesamt verdient?

   c) (2 Punkte) Geben Sie das Nettomonatsgehalt im 9. Jahr an.

   d) (4 Punkte) Welches Nettomonatsgehalt müsste sie im ersten Jahr mindestens bekommen, damit sie im 9. Jahr mehr als 3.000 Euro verdient?

   Ausführung Beispiel 3:

Ausführung Beispiel 3:

Lösung:

a) $a_n = 1000 + (n-1) \cdot 100 = 900 + 100 \cdot n$; $a_7 = 1600$

b) $s_7 = 109200$

c) $a_9 = 2500$

d) $a_1 = 1320$

4. Gegeben ist die Funktion

$$f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^3 - 9x^2 + 11$$

a) (4 Punkte) Für welche $x \in D$ ist die Funktion f konkav?

b) (4 Punkte) Bestimmen Sie

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx$$

c) (4 Punkte) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente im Punkt $P\,(2, f(2))$.

Ausführung Beispiel 4:

Ausführung Beispiel 4:

Lösung:

a) $[-3; 2]$
b) 16,1
c) $y = -22x + 27$

5. Die beiden Inputfaktoren eines Unternehmens, das ein Gut herstellt, sind Arbeit (A) und Kapital (K). Die Produktionsfunktion $f(A, K)$ des Unternehmens ist gegeben durch

$$f(A, K) = 2AK^2 + \frac{A^2}{\sqrt{K-1}} + 2\left(K + \frac{5}{4}\right).$$

Zur Zeit werden 4 Einheiten von A sowie 5 Einheiten von K als Inputmengen eingesetzt.

a) (2 Punkte) Geben Sie einen ökonomisch sinnvollen Definitionsbereich für diese Produktionsfunktion an.

b) (5 Punkte) Um wieviel Prozent steigt näherungsweise der Output, wenn – ausgehend von den ursprünglichen Inputmengen – nun 2 Prozent mehr Kapital eingesetzt wird?

c) (3 Punkte) Wie verändert sich der Output näherungsweise, wenn – ausgehend von den ursprünglichen Inputmengen – nun von A um $0,1$ Einheiten weniger und von K um $0,2$ Einheiten mehr verwendet werden? Steigt oder sinkt der Output?

d) (2 Punkte) Aufgrund einer Sparmaßnahme wird – ausgehend von den ursprünglichen Inputmengen – eine Einheit K weniger eingesetzt. Wie viele Einheiten von Input A müssen nun näherungsweise zusätzlich eingesetzt werden, damit die Outputmenge unverändert bleibt?

Ausführung Beispiel 5:

Ausführung Beispiel 5:

Lösung:

a) $\mathbb{D} = \mathbb{R}_+ \times]1; \infty[$

b) $\varepsilon_K = \frac{90}{49}$, also um $2 \cdot \frac{90}{49} = \frac{180}{49}\%$

c) steigt um näherungsweise $10,8$ Einheiten

d) $r_{AK} = \frac{3}{2}$