Klausur Wirtschaftsmathematik VO

17. Mai 2024

Bitte leserlich in Druckbuchstaben ausfüllen!

NACHNAME:	
VORNAME:	
MATRIKELNUMMER:	

ERLAUBT: **nur** die Formelsammlung des Instituts!

VERBOTEN: **Taschenrechner** und **Handys** am Arbeitsplatz!

Lösungswege müssen nachvollziehbar angegeben werden!

Aufgabe	**max. Punkte**	**erreichte Punkte**
1	12	
2	12	
3	11	
4	13	
5	12	
Summe	**60**	
Note:		

1. Gegeben ist die Menge

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq |x - 1| \wedge y \leq 2 \right\} .$$

a) (4 Punkte) Zeichnen Sie die Menge A in untenstehendes Koordinatensystem.

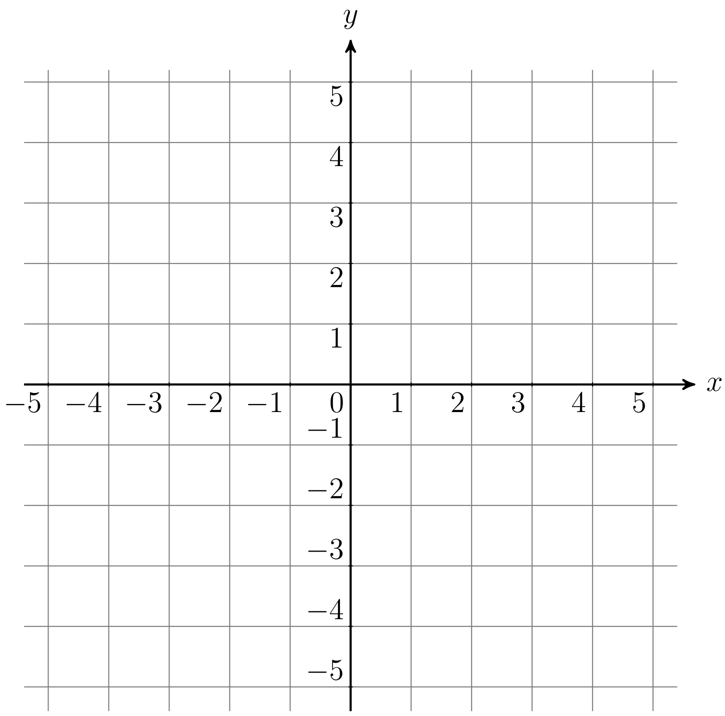
b) (3 Punkte) Bestimmen Sie die Menge $A \triangle \mathbb{R}^2$ und kennzeichnen Sie diese im Koordinatensystem. Ist diese Menge konvex? Begründen Sie Ihre Antwort!

c) (3 Punkte) Berechnen Sie die Doppelsumme.

$$\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{i} 1^{i+j}$$

d) (2 Punkte) Stellen Sie die Doppelsumme aus c) mit nur einem Summenzeichen mit Index k dar.

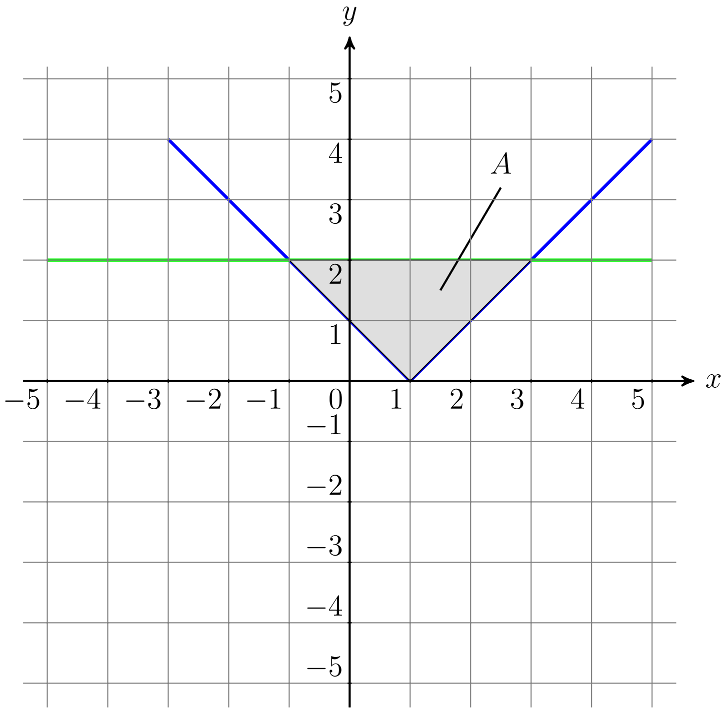
Ausführung Beispiel 1:



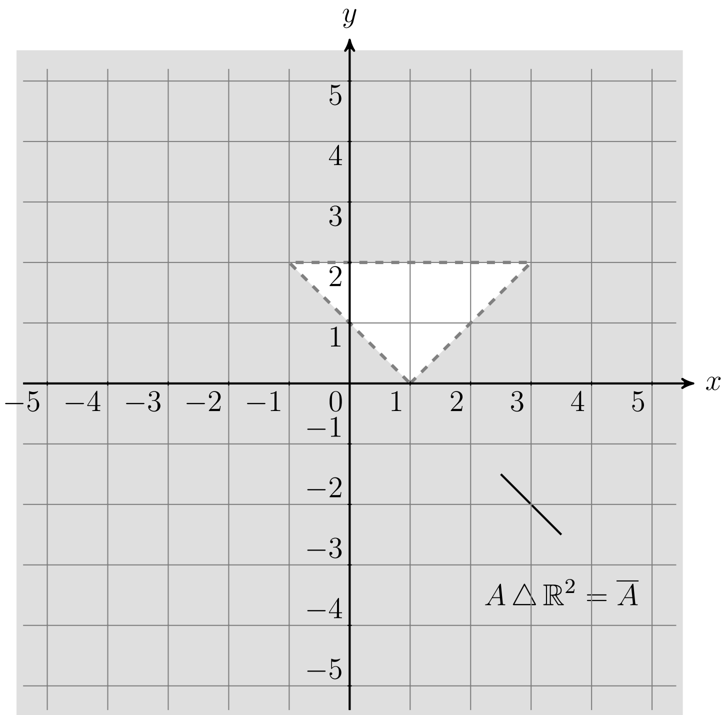
Ausführung Beispiel 1:

Lösung:

a)



b) $A \triangle \mathbb{R}^2 = \overline{A}$; $\overline{A}$ ist nicht konvex. z.B. Verbindungslinie $(-1, 1)$, und $(2, 3)$ liegt nicht zur Gänze in $\overline{A}$.



c) $\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{i} 1^{i+j} = 6$

d) $\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{i} 1^{i+j} = \sum_{k=1}^{3} k$

2. a) (4 Punkte) Gegeben sind die regulären $n \times n$-Matrizen B, X, Y. Lösen Sie die folgende Matrizengleichung nach der Matrix Y auf und vereinfachen Sie so weit wie möglich!

$$B = (X^T X)^{-1} X^T Y$$

b) (8 Punkte) Bestimmen Sie alle Lösungen des folgenden linearen Gleichungssystems!

$$\begin{array}{rcrcrcr}
x & + & 2y & + & 3z & = & -9 \\
2x & + & 5y & - & 2z & = & 16 \\
6x & + & 13y & & & = & 20 \\
3x & + & 7y & - & 9z & = & 47
\end{array}$$

Ausführung Beispiel 2:

Ausführung Beispiel 2:

Lösung:

a) $Y = XB$

b) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

3. Gegeben sind die Folgen:

$$a_n = \frac{3n^2}{n^2+1} \quad \text{und} \quad b_n = \frac{3n+4}{n+\frac{5}{3}}$$

a) (4 Punkte) Berechnen Sie unter Verwendung der Grenzwertrechenregeln den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$$

b) (2 Punkte) Bestimmen Sie für b_n eine untere Schranke. Begründen Sie, warum der von Ihnen gewählte Wert eine untere Schranke ist!

c) (5 Punkte) Bestimmen Sie durch Rechnung für welche $n \in \mathbb{N}$ $a_n > b_n$ ist!

Ausführung Beispiel 3:

Ausführung Beispiel 3:

Lösung:

a) 1

b) z. B. $m = 0$, Zähler und Nenner sind größer Null $\forall n \in \mathbb{N}$

c) Für alle $n > 4$

4. Gegeben sind die reellen Funktionen

$$f(x) = x^2 - 16 \quad \text{und} \quad g(x) = \ln(x - 3)$$

a) (2 Punkte) Bilden Sie die Funktion $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ und bestimmen Sie die größtmögliche Definitionsmenge von $h(x)$ über den reellen Zahlen.

b) (3 Punkte) Wie lautet die erste Ableitung von $h(x)$?

c) (3 Punkte) Bestimmen Sie folgenden Grenzwert:

$$\lim_{x \to 4} h(x)$$

d) (5 Punkte) Wie groß ist die Fläche, die die Funktion $f(x)$ mit der x-Achse im Intervall $[0; 5]$ einschließt?

Ausführung Beispiel 4:

Ausführung Beispiel 4:

Lösung:

a) $D =]3;\infty[\setminus \{4\}$

b) $h'(x) = \dfrac{2x\ln(x-3) - \frac{x^2-16}{x-3}}{[\ln(x-3)]^2}$

c) 8

d) $A = 47$

5. Ein Betrieb stellt blaue und rote Farbe her. Die Menge der blauen Farbe (in Mengeneinheiten ME) wird mit x und die Menge der roten Farbe (in ME) mit y bezeichnet. Die Kostenfunktion lautet dann

$$K(x, y) = x^2 + 6y^2 + 2xy + 10$$

Außerdem kann eine ME blauer Farbe um 20 Euro und eine ME roter Farbe um 80 Euro verkauft werden.

a) (1 Punkt) Wie hoch sind die Fixkosten des Betriebs?

b) (2 Punkte) Geben Sie die Gewinnfunktion des Betriebes an.

c) (3 Punkte) Der Betrieb produziert aktuell zwei ME blaue Farbe und fünf ME rote Farbe. Wie hoch sind die aktuellen Kosten, der aktuelle Erlös und der aktuelle Gewinn?

d) (6 Punkte) Berechnen Sie die gewinnmaximalen Produktionsmengen und weisen Sie nach, dass es sich tatsächlich um ein Maximum handelt. Geben Sie den maximalen Gewinn explizit an!

Ausführung Beispiel 5:

Ausführung Beispiel 5:

Lösung:

a) 10

b) $G(x, y) = -x^2 - 6y^2 + 20x + 80y - 2xy - 10$

c) $K(2, 5) = 184$, $E(2, 5) = 440$ und $G(2, 5) = 256$.

d) $x = 4$ und $y = 6$. $G_{xx} = -2 < 0$, $G_{xy} = G_{yx} = 0 - 2$ und $G_{yy} = -12 < 0$ daher Maximum, $G(4, 6) = 270$.