Klausur Wirtschaftsmathematik VO

9. März 2024

Bitte leserlich in Druckbuchstaben ausfüllen!

NACHNAME:	
VORNAME:	
MATRIKELNUMMER:	

ERLAUBT: **nur** die Formelsammlung des Instituts!

VERBOTEN: **Taschenrechner** und **Handys** am Arbeitsplatz!

Lösungswege müssen nachvollziehbar angegeben werden!

Aufgabe	**max. Punkte**	**erreichte Punkte**
1	12	
2	11	
3	12	
4	13	
5	12	
Summe	**60**	
Note:		

1. a) (6 Punkte) Gegeben sind die drei Mengen

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\big|\, x^2 + y^2 \leq 9\}\,;\; B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\big|\, 2x^2 + y \leq 0\}\,;\; C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, |x| \geq |y|\}.$$

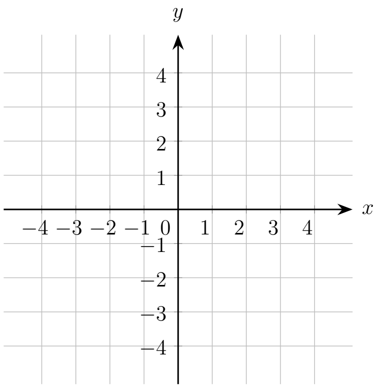
Skizzieren Sie die drei Mengen im entsprechenden der folgenden Koordinatensysteme.

b) (6 Punkte) Lösen Sie die Ungleichung

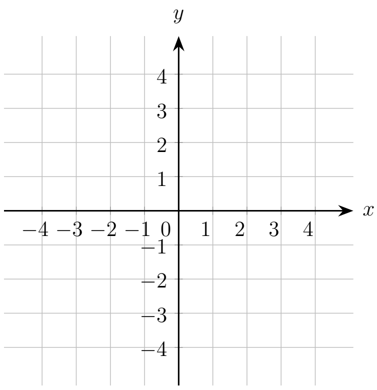
$$\frac{4}{|x|} \geq x$$

Ausführung Beispiel 1:

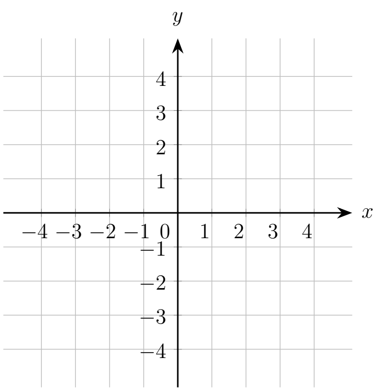
A :



B :



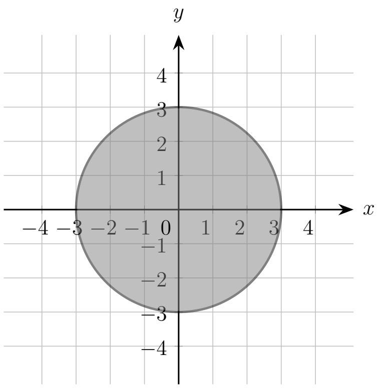
C :

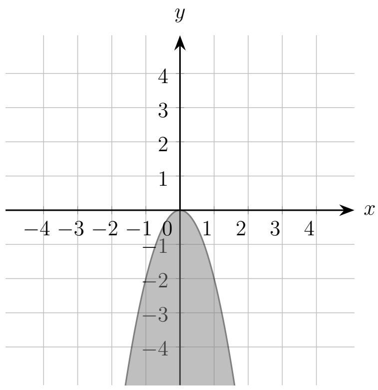


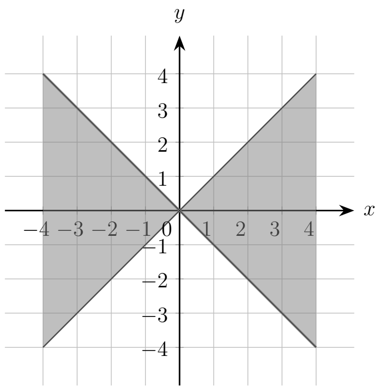
Ausführung Beispiel 1:

Lösung:

a)

$A:$ 

$B:$ 

$C:$ 

b) $L = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \leq 2$ und $x \neq 0\}$

2. Die 200 Einkaufswagen eines Supermarktes stehen montags vor Ladenöffnung alle auf einem Platz vor dem Eingang (E). Während eines Einkaufstages wechseln die Wagen ihre Plätze. Die meisten Kunden lassen den Wagen auf einem Abstellplatz auf dem Parkplatz (P) stehen. Die anderen stellen die Wagen wieder auf den Platz vor dem Eingang zurück. Zählungen über einen längeren Zeitraum hin ergaben folgendes Wechselverhalten während eines Einkaufstages:

   20 % der Wagen, die am Beginn eines Einkaufstages vor dem Eingang E stehen, stehen am Ende des Tages wieder vor dem Eingang, der Rest auf dem Parkplatz. 10 % der Wagen, die am Beginn des Einkaufstages auf dem Parkplatz P stehen, wechseln bis zum Ende des Tages auf den Platz E vor dem Eingang, der Rest bleibt auf dem Parkplatz.

   a) (2 Punkte) Erstellen Sie eine Übergangsmatrix U.

   b) (2 Punkte) Wie viele Einkaufswagen befinden sich montags am Ende des Einkaufstages auf dem Abstellplatz auf dem Parkplatz P?

   c) (7 Punkte) Angenommen am Ende eines Einkaufstages werden am Standort E 30 und am Standort P 170 Einkaufswagen gezählt. Wie waren die Einkaufswagen am Beginn des Einkaufstages aufgeteilt?

   Ausführung Beispiel 2:

Ausführung Beispiel 2:

Lösung:

a) $U = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 200 & 0 \end{pmatrix} \cdot U = \begin{pmatrix} 40 & 160 \end{pmatrix}$; Am Parkplatz stehen somit 160 Wagen.

c) $U^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & -8 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 30 & 170 \end{pmatrix} \cdot U^{-1} = \begin{pmatrix} 100 & 100 \end{pmatrix}$.

3. a) (4 Punkte) Gegeben ist die Folge:

$$a_n = \frac{3+n}{2n^2}$$

Berechnen Sie die ersten vier Glieder dieser Folge, stellen Sie eine Vermutung über das Monotonieverhalten auf und beweisen Sie diese Vermutung!

b) Eine Druckerei möchte eine Druckerpresse kreditfinanziert anschaffen. Sie plant, vier Jahre lang jedes Jahr am Jahresende 2.500 Euro zurückzuzahlen. Wie viel darf die Maschine zu Jahresbeginn des ersten Jahres kosten, wenn mit einem (unrealistischen) Zinssatz von $i = 25$ Prozent kalkuliert wird?

i. (3 Punkte) Fertigen Sie eine graphische Darstellung der Zahlungsströme an und bewerten Sie diese!

ii. (5 Punkte) Lösen Sie die Aufgabe unter Verwendung der Summenformel einer Folge!

Ausführung Beispiel 3:

Ausführung Beispiel 3:

Lösung:

a) $\left\langle 2; \frac{5}{8}; \frac{1}{3}; \frac{7}{32}; \ldots \right\rangle$; streng monoton fallend

b)

i. Klar

ii. 5.904

4. a) Für alle Haushalte in Österreich, die weniger als 2900 kWh Strom im Jahr verbrauchen, gilt die folgende Regelung für die Strompreisbremse:

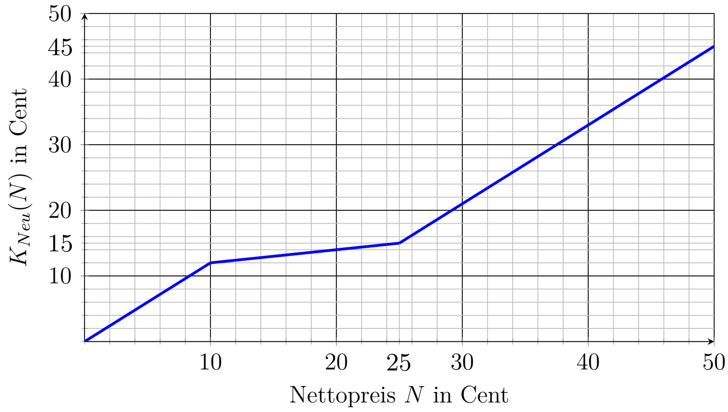
- Liegt der Nettopreis N für eine kWh Strom unter 10 Cent, dann erhält der Haushalt keinen Zuschuss.
- Liegt der Nettopreis N für eine kWh Strom zwischen 10 Cent und 40 Cent, zahlt der Staat $N - 10$ Cent dazu.
- Liegt der Nettopreis N für eine kWh Strom über 40 Cent, zahlt der Staat 30 Cent dazu.

Ausserdem muss der Kunde (unabhängig vom Zuschuss) 20 Prozent Umsatzsteuer auf den jeweiligen Nettopreis N zahlen.

i. (6 Punkte) Erstellen Sie eine stückweise lineare Funktion $K(N)$, die die Höhe der Kosten für eine kWh Strom für einen Haushalt in Cent in Abhängigkeit vom Nettopreis N beschreibt und skizzieren Sie den Graphen von $K(N)$ in nebenstehendes Koordinatensystem.

ii. (2 Punkte) Für welchen Nettopreis N gilt $K(N) = 16$?

b) (unabhängig von a)) Ab 1. Juli 2024 ändern sich die Regeln für die Strompreisbremse und ein Haushalt, der weniger als 2900 kWh Strom im Jahr verbraucht, hat für eine kWh Strom die folgenden Kosten in Abhängigkeit vom Nettopreis N:



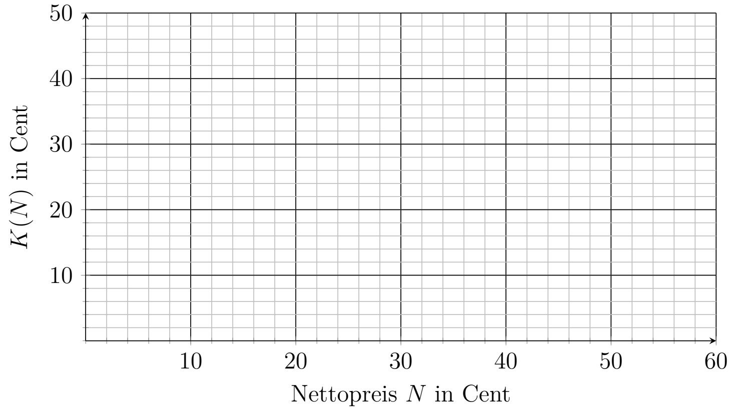
i. (4 Punkte) Erstellen Sie die Funktionsgleichung der obigen stückweise linearen Funktion $K_{Neu}(N)$.

ii. (1 Punkt) Berechnen Sie unter Verwendung der Funktionsgleichung $K_{Neu}(70)$.

Ausführung Beispiel 4:

Ausführung Beispiel 4:

a) i.



Lösung:

a) i. $K(N) = \begin{cases} 1,2 \cdot N & \text{für } 0 \leq N < 10 \\ 0,2 \cdot N + 10 & \text{für } 10 \leq N \leq 40 \\ 1,2 \cdot N - 30 & \text{für } N > 40 \end{cases}$

ii. $N = 30$

b) i. $K_{Neu}(N) = \begin{cases} 1,2 \cdot N & \text{für } 0 \leq N < 10 \\ 0,2 \cdot N + 10 & \text{für } 10 \leq N \leq 25 \\ 1,2 \cdot N - 15 & \text{für } N > 25 \end{cases}$

ii. $K_{Neu}(70) = 59$

5. Die Gewinnfunktion eines Unternehmens, die zwei Produkte herstellt, ist gegeben durch

$$G(x, y) = -x^2 + xy + 6x - 2y^2 + 4y + 9$$

wobei x die Menge des ersten Produkts und y die Menge des zweiten Produkts beschreibt.

a) (3 Punkte) Bestimmen Sie den Gradienten von G allgemein und an der Stelle $(x, y) = (5, 1)$.

b) (6 Punkte) Für welche Produktionsmengen x und y wird der Gewinn maximal? Zeigen Sie, dass es sich tatsächlich um ein Maximum handelt! Wie hoch ist der maximal erzielbare Gewinn?

c) (3 Punkte) Angenommen, aufgrund eines Lieferengpasses können nur $y = 2$ Einheiten des zweiten Produkts produziert werden. Für welche Werte von x hat das Unternehmen im Falle $y = 2$ einen nicht-negativen Gewinn?

Ausführung Beispiel 5:

Ausführung Beispiel 5:

Lösung:

a) $grad\,(G(x,y)) = (-2x+y+6; x-4y+4)$; $grad\,(G(5,1)) = (-3;5)$

b) $x = 4$ und $y = 2$. $H(x,y) = H(4,2) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$; $\det H(4,2) = 7 > 0$ und $f_{xx}(4,2) = -2 < 0$ daher maximal. Maximalgewinn $G(4,2) = 25$

c) für $x \in [0;9]$