Klausur Wirtschaftsmathematik VO

7. Februar 2024

Bitte leserlich in Druckbuchstaben ausfüllen!

NACHNAME:	
VORNAME:	
MATRIKELNUMMER:	

ERLAUBT: **nur** die Formelsammlung des Instituts!

VERBOTEN: **Taschenrechner** und **Handys** am Arbeitsplatz!

Lösungswege müssen nachvollziehbar angegeben werden!

Aufgabe	**max. Punkte**	**erreichte Punkte**
1	11	
2	12	
3	13	
4	12	
5	12	
Summe	**60**	
Note:		

1. a) (5 Punkte) Bestimmen Sie für die folgende Gleichung Definitionsmenge und Lösungsmenge:

$$\frac{x}{x-2} = \frac{2}{x^2-2x} + \frac{1}{x}$$

b) (6 Punkte) Gegeben sind die Mengen

$$A = \{1, 4\}, \quad B = [-\frac{1}{3}; 4[\cap \mathbb{Z}, \quad C = \{x \in \mathbb{R} \,|2 \leq x < 5\}$$

i. Bestimmen Sie die Mengen $A \triangle B$ und $A \times B$.

ii. Bestimmen Sie die Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$ der Menge A

iii. Bestimmen Sie die Komplementmenge $\overline{C}$ der Menge C bezüglich der reellen Zahlen.

Ausführung Beispiel 1:

Ausführung Beispiel 1:

Lösung:

a) $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$; $\mathbb{L} = \{1\}$

b)

i. $A \triangle B = \{0, 2, 3; 4\}$, $A \times B = \{(1, 0); (1, 1); (1, 2); (1, 3); (4, 0); (4, 1); (4, 2); (4, 3)\}$

ii. $\mathcal{P}(A) = \{\{\}; \{1\}; \{4\}; \{1, 4\}\}$

iii. $\overline{C} = \mathbb{R} \setminus C =]-\infty; 2[\cup [5; \infty[$

2. Gegeben sind die beiden 3×3 Matrizen A und B wie folgt:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

und $B = (b_{ij})$ mit

$$b_{ij} = \begin{cases} i + j + 1 & \text{falls } i \cdot j \text{ gerade} \\ i \cdot j & \text{falls } i \cdot j \text{ ungerade} \end{cases}$$

a) (3 Punkte) Bestimmen Sie die Matrix B.
b) (4 Punkte) Berechnen Sie $A^T \cdot (E - B)$.
c) (2 Punkte) Sind der erste und der dritte Spaltenvektor der Matrix B linear abhängig? Begründen Sie durch Rechnung!
d) (3 Punkte) Berechnen Sie für die Matrix A:

$$\sum_{i=1}^{2} \sum_{j=2}^{3} a_{ij} \qquad \text{und} \qquad \sum_{k=1}^{3} a_{kk}$$

Ausführung Beispiel 2:

Ausführung Beispiel 2:

Lösung:

a)

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{pmatrix} -5 & -6 & -12 \\ 5 & 6 & 7 \\ \text{-}7 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

c) Spaltenvektoren sind nicht linear abhängig! Dritter Vektor ist kein Vielfaches des ersten.

d)

$$\sum_{i=1}^{2} \sum_{j=2}^{3} a_{ij} = 2$$

und

$$\sum_{k=1}^{3} a_{kk} = -7$$

3. a) (5 Punkte) Bestimmen Sie mit Hilfe der Grenzwertrechenregeln den folgenden Grenzwert:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+7}{2n+1}-\frac{3n^2-5}{3n+3}\right)$$

b) Gegeben ist die folgende Reihe:

$$\sum_{i=2}^{\infty}(x+2)^i$$

i. (1 Punkt) Bestimmen Sie – wenn möglich – den Wert der Reihe für $x=0$.

ii. (3 Punkte) Für welche $x\in\mathbb{R}$ konvergiert die Reihe?

iii. (4 Punkte) Für welches $x\in\mathbb{R}$ hat die Reihe den Wert $\frac{1}{2}$?

Ausführung Beispiel 3:

Ausführung Beispiel 3:

Lösung:

a) $\frac{1}{2}$

b)

   i. ∞

   ii. $x \in]-3; -1[$

   iii. $x = -\frac{3}{2}$

4. a) (5 Punkte) Die Gesamtkosten für die Produktion von x Einheiten eines Gutes sind

$$K(x) = ax^2 + bx + c, \qquad x > 0$$

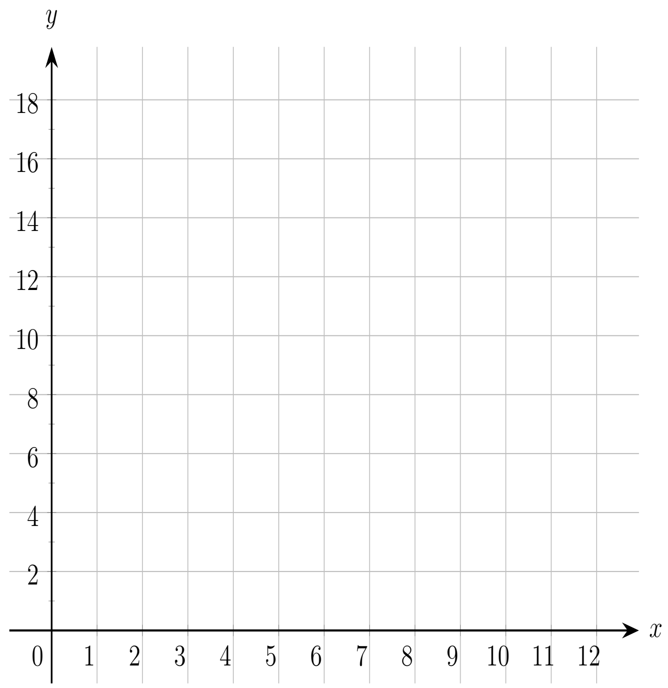
wobei a, b und c positive Konstanten sind. Zeigen Sie, dass die Funktion der Durchschnittskosten $D(x) = \frac{K(x)}{x}$ ein Minimum bei $x = \sqrt{\frac{c}{a}}$ hat. Zeigen Sie, dass es sich tatsächlich um ein Minimum handelt!

b) Nehmen Sie für die Kostenfunktion in a) folgende Werte für die Konstanten an: $a = 1$, $b = 2$, $c = 9$ und verwenden Sie die folgende Preis-Absatz-Funktion: $p(x) = -2x + 14$.

i. (4 Punkte) Skizzieren Sie die Graphen der Durchschnittskosten, der Grenzkosten und der Preis-Absatz-Funktion in nachstehendem Koordinatensystem.

ii. (3 Punkte) Wenn das Unternehmen $x = 3$ Einheiten verkaufen möchte, welchen Preis kann es höchstens dafür verlangen? Wie groß ist dann der erzielte Gewinn?

Ausführung Beispiel 4:



Ausführung Beispiel 4:

Lösung:

a)

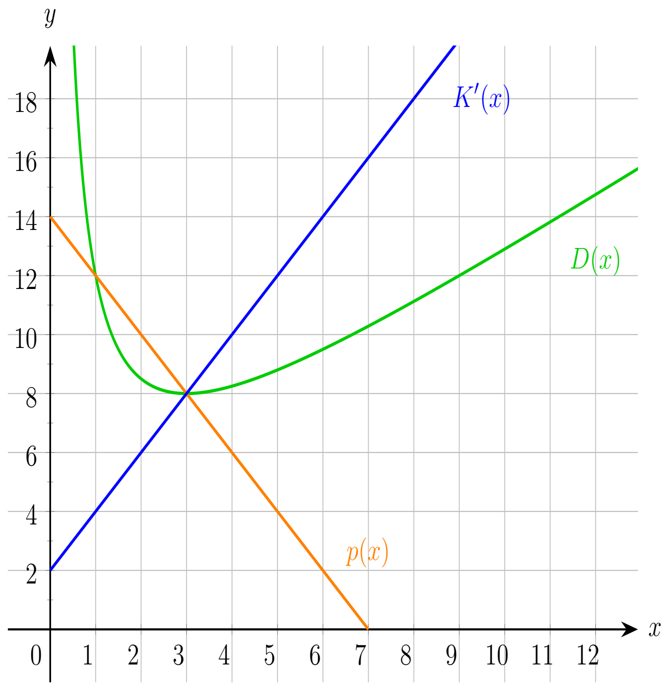
$$D'(x) = a - \frac{c}{x^2}$$

$$D''(x) = \frac{2c}{x^3}$$

$$D'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{c}{a}} > 0$$

$$D''(\sqrt{\frac{c}{a}}) = \frac{2c}{(x)^3} > 0 \Rightarrow \text{Minimum}$$

b)



$p(3) = 8$ GE; $E\,(3) = 24$ GE; $K\,(3) = 24$ GE; $G\,(3) = 0$

5. Die Nachfrage N^1 nach einem Gut 1 hängt nicht nur vom Preis p_1 dieses Gutes, sondern auch vom Preis p_2 eines zweiten Gutes ab:

$$N^1 (p_1, p_2) = a \cdot p_1^{-2} \cdot \sqrt{p_2} \qquad a \in \mathbb{R}_{++}$$

a) (3 Punkte) Überprüfen Sie durch Rechnung, ob die Funktion N^1 homogen ist! Wenn ja, von welchem Grad?

b) (3 Punkte) Um wie viel Prozent ändert sich die Nachfrage N^1 näherungsweise, wenn man den Preis p_1 um ein Prozent erhöht?

c) (2 Punkte) Um wie viele Einheiten (abhängig vom Parameter a) ändert sich die Nachfrage N^1 näherungsweise, wenn man – ausgehend von $(p_1, p_2) = (1, 4)$ – den Preis p_2 um eine Einheit erhöht?

d) (4 Punkte) Bestimmen Sie a so, dass die Nachfrage N^1 näherungsweise um $\frac{5}{2}$ Einheiten sinkt, wenn man, ausgehend von der Preiskombination $(p_1, p_2) = (1, 4)$, p_1 um $\frac{1}{10}$ Einheit erhöht und p_2 um $0,4$ Einheiten verringert.

Ausführung Beispiel 5:

Ausführung Beispiel 5:

Lösung:

a) homogen vom Grad $-\frac{3}{2}$

b) Die Nachfrage sinkt um 2 %.

c) Die Nachfrage steigt um $\frac{a}{4}$ Einheiten.

d) $a = 5$