Klausur Wirtschaftsmathematik VO

25. November 2023

Bitte leserlich in Druckbuchstaben ausfüllen!

NACHNAME:	
VORNAME:	
MATRIKELNUMMER:	

ERLAUBT: **nur** die Formelsammlung des Instituts!

VERBOTEN: **Taschenrechner** und **Handys** am Arbeitsplatz!

Lösungswege müssen nachvollziehbar angegeben werden!

Aufgabe	**max. Punkte**	**erreichte Punkte**
1	12	
2	14	
3	12	
4	11	
5	11	
Summe	**60**	
Note:		

1. a) (4 Punkte) Vereinfachen Sie den folgenden Ausdruck soweit möglich:

$$\frac{\sqrt[3]{m^4}}{27 \cdot m^{\frac{1}{3}}} \left(\left(-\frac{3}{m}\right)^3\right)^4 \cdot \frac{m^9}{3^4} =$$

b) (8 Punkte) (Unabhängig von a)) Gegeben ist die folgende Ungleichung:

$$|2 - x| \leq \frac{4}{x - 2}$$

i. Bestimmen Sie die größtmögliche Definitionsmenge $D \subset \mathbb{R}$.

ii. Lösen Sie die Ungleichung und geben Sie die Lösungsmenge an.

Ausführung Beispiel 1:

Ausführung Beispiel 1:

Lösung:

a) $\frac{243}{m^2}$

b)

i. $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

ii. $L =]2; 4]$

2. Gegeben seien die Matrizen A und ein Zeilenvektor v:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & t \\ 4 & 7-t & -6 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad v = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \text{ mit } a, t \in \mathbb{R}$$

a) (6 Punkte) Bestimmen Sie für alle $t \in \mathbb{R}$ den Rang der Matrix A.

b) (5 Punkte) Bestimmen Sie für $t = 3$ alle Lösungen des Gleichungssystems

$$A \cdot x = \begin{pmatrix} 9 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix}$$

c) (3 Punkte) Bestimmen Sie für $t = 3$ alle $a \in \mathbb{R}$ so, dass die $A \cdot v^T$ die Länge 7 hat.

Ausführung Beispiel 2:

Ausführung Beispiel 2:

Lösung:

a) Rang 3 für $t \in \mathbb{R} \setminus \{-3; 2\}$, Rang 2 für $t \in \{-3; 2\}$

b) $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

c) $a \in \{-1; 1\}$

3. a) (4 Punkte) Bestimmen Sie – wenn möglich – den Wert der folgenden Reihe:

$$5 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\frac{3^{4i}}{100^{i}}}$$

b) Ein Unternehmen produziert ein bestimmtes Produkt und möchte ausgehend vom Jänner 2023 bis Dezember 2024 die Produktion monatlich um eine konstante Stückzahl erhöhen. Geplant ist, dass im März 2023 genau 2.100 Stück produziert werden sollen und dass ausgehend vom März 2023 die Stückzahl bis Oktober 2023 um genau 10 Prozent ansteigen soll.

i. (4 Punkte) Wie hoch muss die Anfangsproduktion im Jänner 2023 sein?

ii. (2 Punkte) Welche Stückanzahl wird im März 2024 produziert?

iii. (2 Punkte) Wie hoch ist die gesamte Stückzahl, die von Jänner 2023 bis Dezember 2024 produziert wird?

Ausführung Beispiel 3:

Ausführung Beispiel 3:

Lösung:

a) 45

b)

    i. 2.040 Stück

    ii. 2.460 Stück

    iii. $s_{24} = 4.770 \cdot 12 = 57.240$ Stück

4. a) (5 Punkte) Gegeben sind die Mengen M_1 und M_2:

$$M_1 = \{x \in \mathbb{N} \mid 6 \leq x < 15\} \quad \text{und} \quad M_2 = \left\{x \in \mathbb{N} \middle| x^2 \leq 50\right\}$$

sowie die Zuordnungsvorschrift f mit

$$f : M_1 \to M_2 \quad \text{mit} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & \text{wenn } x \text{ gerade} \\ \frac{x-5}{2}, & \text{sonst} \end{cases}$$

i. Skizzieren Sie die Zuordnungsvorschrift f in einem Pfeildiagramm. Ist durch diese Vorschrift eine Funktion definiert? Begründen Sie!

ii. Ist die Zuordnungsvorschrift injektiv, surjektiv oder bijektiv? Existiert eine Inverse? Begründen Sie!

b) (6 Punkte) (Unabhängig von a)) Gegeben ist die Funktion

$$g(x) = \frac{x-2}{2x}$$

Bestimmen Sie die Definitionsmenge, alle Stammfunktionen und die erste Ableitung von $g(x)$!

Ausführung Beispiel 4:

Ausführung Beispiel 4:

Lösung:

a)

   i. klar

   ii. nicht injektiv, da z.B. zwei Pfeile zu 3 gehen; surjektiv, da auf alle Elemente von M_2 ein Pfeil trifft; nicht bijektiv, da auch nicht injektiv. Es gibt keine Inverse, da nicht bijektiv.

b) $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $G(x) = \frac{x}{2} - \ln|x| + c$, $c \in \mathbb{R}$; $g'(x) = \frac{1}{x^2}$

5. Gegeben ist die Funktion in zwei Variablen

$$f : D \to \mathbb{R},\ f(x,y) = x \cdot \sqrt{y} - x^2 - y + 3x$$

mit $D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, (x-2)^2 + y^2 \leq 9 \wedge (x > 0) \wedge (y > 0) \right\}$

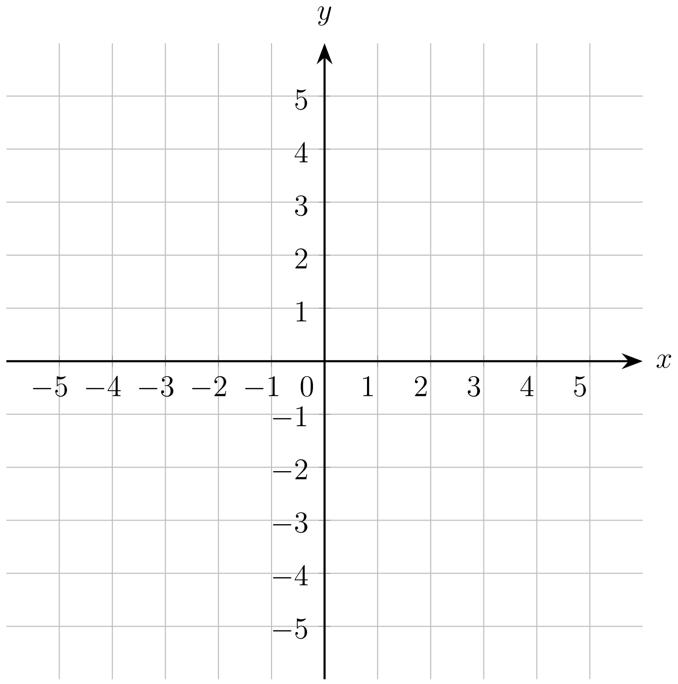
a) (3 Punkte) Skizzieren Sie den Definitionsbereich der Funktion in nachstehendem Koordinatensystem.

b) (4 Punkte) Bestimmen Sie alle stationären Stellen von f.

c) (4 Punkte) Es gilt $f_{xx}(2,1) = -2$, $f_{xy}(2,1) = \dfrac{1}{2}$ und $f_{yy}(2,1) = -\dfrac{1}{2}$.

Ist die stationäre Stelle $(2,1)$ eine Maximal-, Minimal- oder Sattelstelle? Begründen Sie!

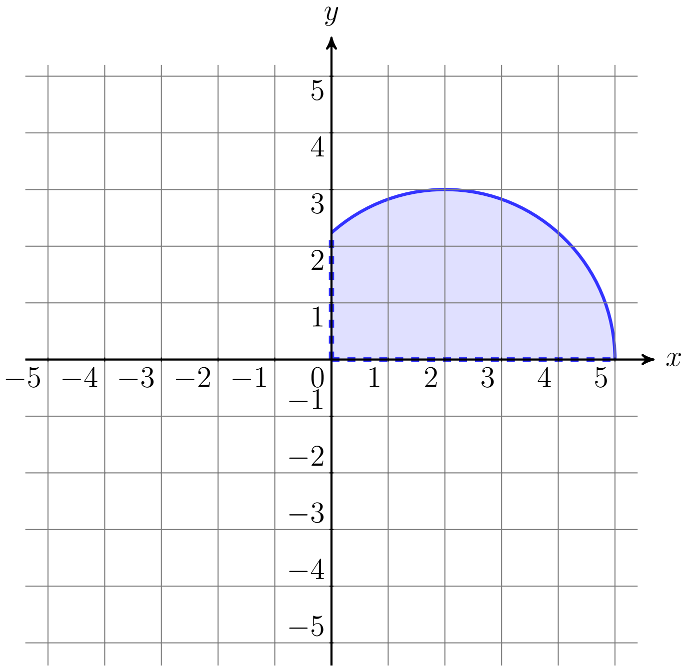
Ausführung Beispiel 5:



Ausführung Beispiel 5:

Lösung:

a)



b)

$f_x\left(x,y\right)=\sqrt{y}-2x+3$

$f_y\left(x,y\right)=\dfrac{x}{2\sqrt{y}}-1$

$STS\left(2,1\right)$:

$f_x\left(2,1\right)=\sqrt{1}-2\cdot 2+3=0$

$f_y\left(2,1\right)=\dfrac{2}{2\sqrt{1}}-1=0$

c) $H\left(2,1\right)=\begin{pmatrix}-2 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$, $(2,1)$ ist lokale Maximumstelle ($f_{xx}\left(2,1\right)=-2<0$ und $det\left(H\left(2,1\right)\right)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}>0$)