Klausur Wirtschaftsmathematik VO

25. September 2023

Bitte leserlich in Druckbuchstaben ausfüllen!

NACHNAME:	
VORNAME:	
MATRIKELNUMMER:	

ERLAUBT: **nur** die Formelsammlung des Instituts!

VERBOTEN: **Taschenrechner** und **Handys** am Arbeitsplatz!

Lösungswege müssen nachvollziehbar angegeben werden!

Aufgabe	**max. Punkte**	**erreichte Punkte**
1	12	
2	13	
3	12	
4	11	
5	12	
Summe	**60**	
Note:		

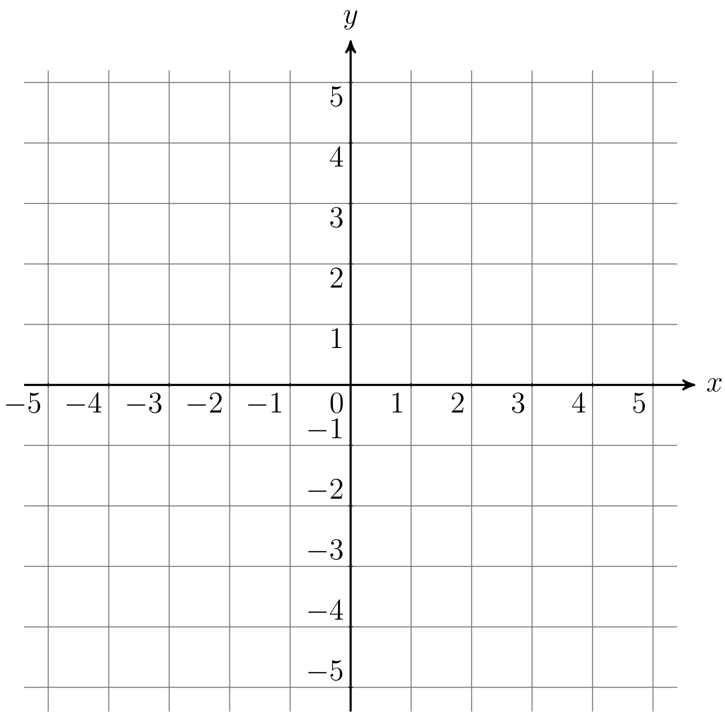
1. a) (6 Punkte) Lösen Sie die folgende Ungleichung und geben Sie die Lösungsmenge über $\mathbb{R}$ an!

$$\frac{-4}{|x+2|} > -2$$

b) (6 Punkte) Gegeben sind die Mengen M_1 bis M_3, A und B, die wie folgt definiert sind:
$M_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 16\}$
$M_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -|x| - y = 0\}$
$M_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}$
$A = \bigcup_{i=1}^{3} M_i$
$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 16\}$

Skizzieren Sie die Menge $A \cap B$ in nachstehendem Koordinatensystem! Ist diese Menge konvex?

Ausführung Beispiel 1:

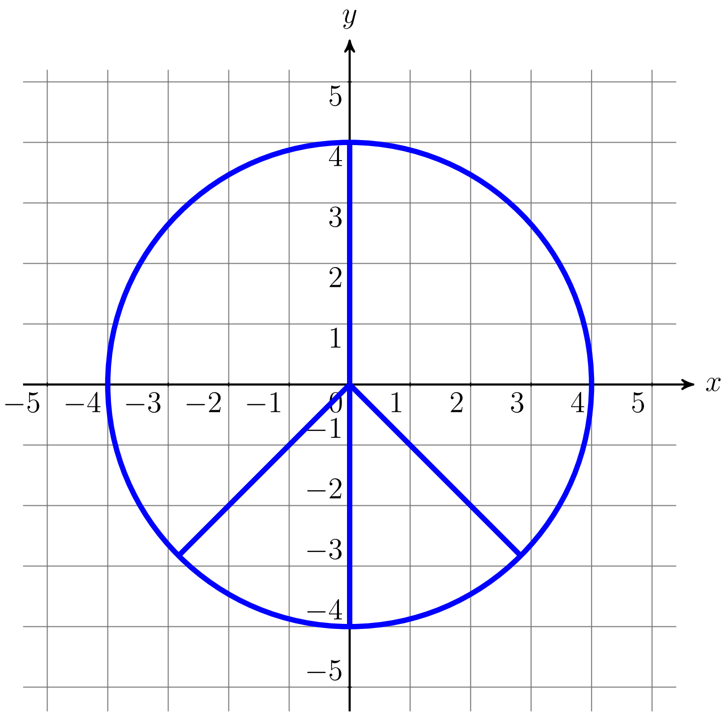


Ausführung Beispiel 1:

Lösung:

a) $\mathbb{L} =]-\infty; -4[\cup]0; \infty[$

b)



2. Gegeben ist das folgende Gleichungssystem mit einem Parameter $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & = & 0 \\ & & x_2 & + & 3x_3 & = & t \\ -x_1 & + & 2x_2 & + & tx_3 & = & 5 \end{array}$$

a) (5 Punkte) Für welche Werte von $t \in \mathbb{R}$ besitzt das Gleichungssystem genau eine Lösung?

b) (5 Punkte) Für welche Werte von $t \in \mathbb{R}$ besitzt das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen? Geben Sie diese Lösungen an !

c) (3 Punkte) Gibt es einen Wert für t, für den $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$ Lösung des linearen Gleichungssystems ist?

Ausführung Beispiel 2:

Ausführung Beispiel 2:

Lösung:

a) $t \neq 5$

b) $t = 5$; $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$; $t \in \mathbb{R}$

c) $t = -2$

3. a) (3 Punkte) Gegeben ist die Zahlenfolge:

$$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25, \ldots$$

   i. Geben Sie ein Bildungsgesetz in expliziter Darstellung an.
   ii. Was lässt sich über die Konvergenz der zugehörigen Reihe aussagen? Begründen Sie!

   b) Der australische Bergbaukonzern RT plc betreibt eine Goldmine in West Australien. Im ersten Jahr betrug die abgebaute Menge Gold 1.250 kg. In den darauffolgenden Jahren werden nur noch $\frac{3}{5}$ (= 60%) der Menge des Vorjahres abgebaut.

   i. (3 Punkte) Welche Goldmenge wird im 4. Jahr abgebaut?
   ii. (4 Punkte) Wie groß ist die in den ersten 3 Jahren insgesamt geförderte Menge Gold? Berechnen Sie die gesuchte Menge unter Verwendung einer Summenformel.
   iii. (2 Punkte) Welche Menge Gold kann insgesamt gefördert werden, wenn man diesen Abbauvorgang (theoretisch) unendlich lange fortsetzen würde?

   Hinweis: Verwenden Sie Bruchschreibweise!

Ausführung Beispiel 3:

Ausführung Beispiel 3:

Lösung:

a)

i. $a_n = n^2$

ii. die a_n bilden keine Nullfolge, daher divergiert die zugehörige Reihe.

b)

i. $a_4 = 270$ kg

ii. $s_3 = 2.450$ kg

iii. $s_\infty = 3.125$ kg

4.

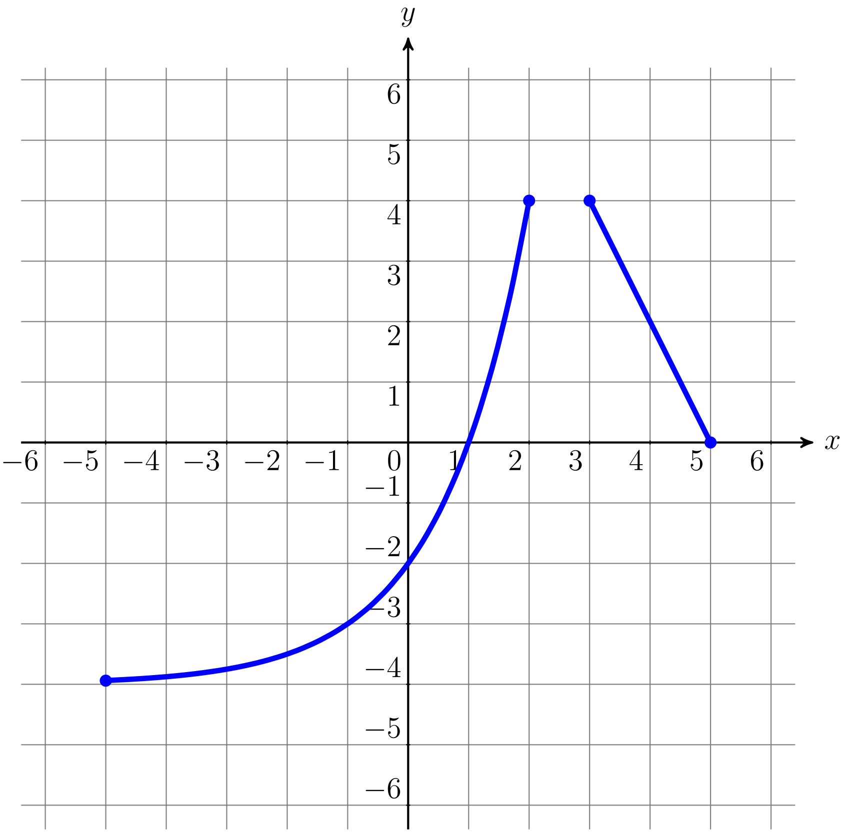
a) Gegeben ist die Funktion

$$g(x) = \ln(x^2 - 4)$$

i. (3 Punkte) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich D der Funktion g!

ii. (2 Punkte) Für welche $x \in D$ gilt $g(x) = \ln(12)$?

b) (6 Punkte) (Unabhängig von a)) Gegeben ist der folgende Funktionsgraph einer Funktion $f : D \to \mathbb{R}$:



i. Geben Sie den Definitionsbereich D der Funktion f an!

ii. Geben Sie alle Nullstellen der Funktion f an!

iii. Für welche Werte von x ist $f''(x) \leq 0$?

iv. Für welche Werte von x ist $f'(x) \geq 0$?

v. Für welche Werte von x gilt $f(x) = 4$?

vi. Bestimmen Sie den maximalen Funktionswert der Funktion f!

Lesen Sie die Antworten direkt aus der Graphik ab und geben Sie eine kurze verbale Begründung. Es sind keine Rechnungen notwendig!

Ausführung Beispiel 4:

Ausführung Beispiel 4:

Lösung:

a)
   i. $D = \mathbb{R} \setminus [-2; 2]$.
   ii. $x = \pm 4$

b)
   i. $D = [-5, 2] \cup [3, 5]$.
   ii. $x_1 = 1$ und $x_2 = 5$.
   iii. $]3, 5[$
   iv. $]-5; 2[$
   v. $x_1 = 2$ und $x_2 = 3$
   vi. 4

5. Gegen ist die mehrdimensionale Funktion $f(x, y)$ in den Variablen x und y:

$$f(x, y) = x^3 - 12x + 5y^2$$

a) (4 Punkte) Ermitteln Sie die stationären Stellen von f.

b) (5 Punkte) Stellen Sie mit Hilfe der Hesse-Matrix fest, ob es sich bei den unter a) ermittelten Stellen um (lokale) Maxima, Minima oder Sattelpunkte handelt.

c) (3 Punkte) Bestimmen Sie die Koordinate z_2 des Vektors $\vec{z} = \begin{pmatrix} 2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ so, dass die normierte Richtungsableitung der Funktion f – ausgehend von der Stelle (3, 1) – in Richtung des Vektors $\vec{z}$ den Wert 0 hat!

Ausführung Beispiel 5:

Ausführung Beispiel 5:

Lösung:

a) $STS_1\,(2,0)$; $STS_2\,(-2,0)$

b) $H = \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$; $STS_1 \ldots$Minimum; $STS_2 \ldots$ Sattelpunkt

c) $z_2 = -3$