Klausur Wirtschaftsmathematik VO

03. Juli 2023

Bitte leserlich in Druckbuchstaben ausfüllen!

NACHNAME:	
VORNAME:	
MATRIKELNUMMER:	

ERLAUBT: **nur** die Formelsammlung des Instituts!

VERBOTEN: **Taschenrechner** und **Handys** am Arbeitsplatz!

Lösungswege müssen nachvollziehbar angegeben werden!

Aufgabe	**max. Punkte**	**erreichte Punkte**
1	10	
2	12	
3	13	
4	13	
5	12	
Summe	**60**	
Note:		

1. a) (5 Punkte) Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden Ungleichung über $\mathbb{R}$:

$$2x - 12 \leq \frac{|2x - 4|}{3}$$

b) (3 Punkte) Für welche Werte $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ besitzt die Gleichung

$$ax^2 + 8x - 2 = 0$$

genau eine Lösung? Wie lautet diese Lösung?

c) (2 Punkte) Bestimmen Sie alle Mengen M für die gilt: $M \subset \{5, 6, 7\}$.

Ausführung Beispiel 1:

Ausführung Beispiel 1:

Lösung:

a) $\mathbb{L} =]-\infty; 8]$

b) $a = -8$; $x = \dfrac{1}{2}$

c) $\{\,\}$; $\{5\}$;$\{6\}$;$\{7\}$;$\{5,6\}$;$\{5,7\}$;$\{6,7\}$

2. Gegeben ist eine 4×5 Matrix $C = (c_{ij})$ mit

$$c_{ij} = \begin{cases} |i-j| & \text{für } \; i < j \\ i^2 & \text{für } \; i = j \\ \dfrac{1}{2^{j-i}} & \text{für } \; i > j \end{cases}$$

a) (6 Punkte) Schreiben Sie die Matrix C ohne Verwendung von Brüchen an!
Kann die Matrix C den Rang 5 besitzen? Begründen Sie Ihre Antwort!

b) (6 Punkte) (Unabhängig von a))

Bestimmen Sie jene 2×2-Matrix $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, deren Produkt mit der 2×2-Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ kommutativ ist, für die also $A \cdot B = B \cdot A$ gilt.

Ausführung Beispiel 2:

Ausführung Beispiel 2:

Lösung:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 9 & 1 & 2 \\ 8 & 4 & 2 & 16 & 1 \end{pmatrix}$; nein, der Rang einer 4×5 Matrix kann maximal 4 sein.

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $A \cdot B = B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

3. a) (3 Punkte) Bestimmen Sie unter Verwendung der Grenzwertrechenregeln den Grenzwert der Folge a_n:

$$a_n = \frac{n^3 + 5n^2 - 1}{n \cdot \left(3n^2 + 9 + \frac{6}{n}\right)}$$

b) (6 Punkte) Ist die Folge b_n monoton und beschränkt? Beweisen Sie Ihre Antworten!

$$b_n = \frac{2n}{n+3}$$

c) (4 Punkte) Untersuchen Sie die folgende Reihe auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Wert der Reihe!

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n+1}}{5^n}$$

Ausführung Beispiel 3:

Ausführung Beispiel 3:

Lösung:

a) $\frac{1}{3}$

b) $b_n$ist streng monoton steigend, Untere Schranke z.B.: $m = \frac{1}{2}$; obere Schranke z.B.: $M = 2$

c) geometrische Reihe mit $q = \frac{4}{5}$; Summe: $s_\infty = 8$

4. Die Grenzkostenfunktion eines Unternehmens ist gegeben durch

$$K'(x) = 3x^2 - 2x + 4$$

a) (2 Punkte) Berechnen Sie die Grenzkosten für $x = 2$ und interpretieren Sie Ihr Ergebnis.

b) (3 Punkte) Bestimmen Sie die Kostenfunktion $K(x)$, wobei die Kosten für eine Produktionsmenge von 2 Mengeneinheiten 13 Geldeinheiten betragen.

c) (2 Punkte) Untersuchen Sie die Kostenfunktion auf Extrema.

d) (6 Punkte) Gegeben ist die Nachfragefunktion des Unternehmens durch $x(p) = 12 - 2p$. Bestimmen Sie nun die gewinnmaximierende Erzeugungsmenge und zeigen Sie, dass es sich tatsächlich um ein Maximum handelt.

Ausführung Beispiel 4:

Ausführung Beispiel 4:

Lösung:

a) $K'(2) = 12$. Ausgehend von 2 produzierten Einheiten betragen die zusätzlichen Kosten einer weiteren Einheit näherungsweise 12 Geldeinheiten.

b) $K(x) = x^3 - x^2 + 4x + 1$

c) $K'(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, daher hat K keine stationären Stellen.

   (Für $D = [0; x_G]$ ($x_G \ldots$ Kapazitätsgrenze), würde K an der Stelle $x = 0$ ein globales Minimum und an der Stelle $x = x_G$ ein globales Maximum besitzen.)

d) $x = 1$; $G''(1) = -5 < 0$

5. Gegeben sind die zwei Nachfragefunktionen N^1 und N^2 für die Güter 1 und 2 in Abhängigkeit der Preise für die Güter 1, 2 und 3.

$$N^1(p_1, p_2, p_3) = 3 - 5p_1 + 2p_2^2 p_3 + \frac{16}{\sqrt{p_3}}$$

$$N^2(p_1, p_2, p_3) = 2 - \frac{50}{p_1 + 2} - 3p_2^2 + \frac{8}{p_3}$$

Der aktuelle Preisvektor lautet $(p_1, p_2, p_3) = (3, 1, 4)$.

a) (4 Punkte) Berechnen Sie den Gradienten von N^1 für die aktuellen Preise.

b) (3 Punkte) Um wie viel Prozent ändert sich, ausgehend von den aktuellen Preisen, die Nachfrage nach Gut 1 ungefähr, wenn sich der Preis von Gut 3 um ein Prozent erhöht?

c) (2 Punkte) Bestimmen Sie, ausgehend von den aktuellen Preisen, die Grenznachfrage nach Gut 2 bezogen auf den Preis des ersten Gutes.

d) (3 Punkte) Um wie viele Einheiten ändert sich, ausgehend von den aktuellen Preisen, die Nachfrage nach Gut 2 ungefähr, wenn der Preis p_2 um $0,1$ Einheiten steigt, der Preis p_3 um $0,4$ Einheiten sinkt und p_1 unverändert bleibt?

Ausführung Beispiel 5:

Ausführung Beispiel 5:

Lösung:

a) $(-5, 16, 1)$

b) Steigt um näherungsweise 1%

c) 2

d) Die Nachfrage sinkt um näherungsweise $0,4$ Einheiten.