Klausur Wirtschaftsmathematik VO

18. März 2023

Bitte leserlich in Druckbuchstaben ausfüllen!

NACHNAME:	
VORNAME:	
MATRIKELNUMMER:	

ERLAUBT: **nur** die Formelsammlung des Instituts!

VERBOTEN: **Taschenrechner** und **Handys** am Arbeitsplatz!

Aufgabe	**max. Punkte**	**erreichte Punkte**
1	12	
2	12	
3	12	
4	12	
5	12	
Summe	**60**	
Note:		

1. a) (6 Punkte) Bestimmen Sie die Definitionsmenge, lösen Sie die Gleichung nach x auf und geben Sie die Lösungsmenge über $\mathbb{R}$ an!

$$|x+3| - \sqrt{29-2x} = 0$$

b) (2 Punkte) Berechnen Sie:

$$\sqrt{\sum_{h=1}^{10} h^3}$$

c) (4 Punkte) Berechnen Sie folgende Doppelsumme!

$$\sum_{j=0}^{2} \sum_{k=2}^{5} (k-1)^j \cdot (-1)^k$$

Ausführung Beispiel 1:

Ausführung Beispiel 1:

Lösung:

a) $D = \left]-\infty; \frac{29}{2}\right]$; $L = \{-10; 2\}$

b) 55

c) -12

2. a) (6 Punkte) Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{R}$ für welche das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit nachfolgender Koeffizientenmatrix A und Vektor b

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a \\ -a & -8 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 6+a \end{pmatrix}$$

nicht lösbar ist.

b) (6 Punkte) Für welche $a \in \mathbb{R}$ besitzt das *homogene* LGS mit Koeffizientenmatrix A nichttriviale Lösungen? Geben Sie diese Lösungen an.

Ausführung Beispiel 2:

Ausführung Beispiel 2:

Lösung:

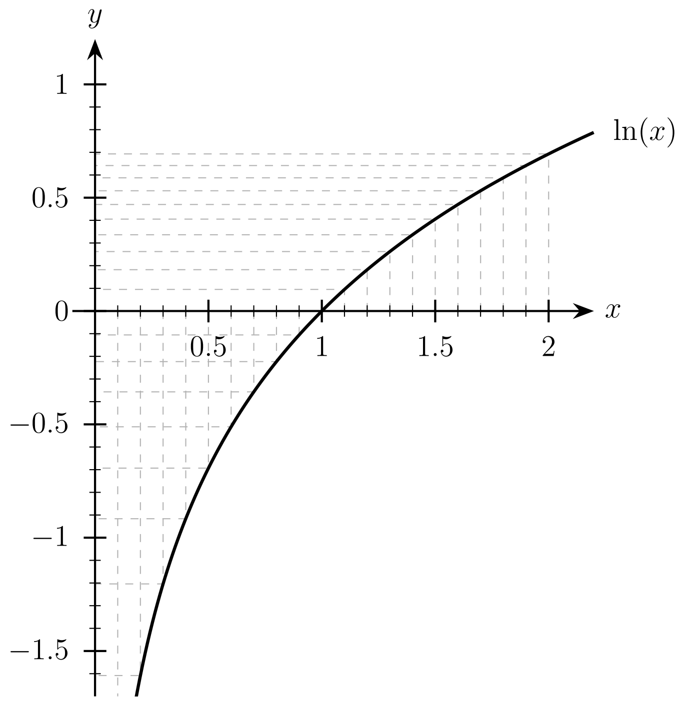
a) $a = 4$

b) $a = -4$: $X = t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $a = 4$: $X = t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

3. a) (4 Punkte) Julia erhält ein Angebot ihrer Bank, ihre Ersparnisse von € 8.000 zu einem extrem attraktiven jährlichen Zinssatz i anzulegen. Julia freut sich, da sie nun weiß, dass sie in 3 Jahren ein Vermögen von € 27.000 besitzen wird. Wie hoch ist der jährliche Zinssatz i, den die Bank Julia anbietet? Hinweis: Verwenden Sie für die Berechnung Bruchschreibweise!

b) (8 Punkte) (unabhängig von a)) Zur Finanzierung seines Studiums erhält Thomas von seinen Großeltern € 50.000, die er sehr gut verzinst zu einem Zinssatz von $i = \frac{1}{9}$ p.a. auf einem Konto anlegt. Wie viele Jahre darf Thomas für sein Studium benötigen, um ausschließlich vom erhaltenem Geld leben zu können, wenn er am Beginn eines jeden Jahres € 10.000 vom Konto abhebt und die erste Abhebung zu $t = 0$ stattfindet?

Geben Sie eine Gleichung zur Bestimmung der Anzahl der Jahre an und lösen Sie diese dann nach der gesuchten Größe auf. Berechnen Sie die gesuchte Größe näherungsweise, indem Sie die benötigten Werte der ln-Funktion der folgenden Graphik entnehmen.



Ausführung Beispiel 3:

Ausführung Beispiel 3:

Lösung:

a) $i = 50\,\%$ p.a.

b) $n = \frac{\ln(0{,}5)}{\ln(0{,}9)} \approx \frac{-0{,}7}{-0{,}1} = 7$ Jahre (exakt: $n \leq \frac{\ln(0{,}5)}{\ln(0{,}9)} = 6{,}58$ Jahre, also 6 Jahre)

4. In einem fiktiven Land gelten die folgende Steuersätze in Abhängigkeit vom jährlichen Bruttoeinkommen B:

Jahreseinkommen	Grenzsteuersatz in Prozent
bis € 30.000 (einschließlich)	10
von € 30.000 bis € 60.000 (einschließlich)	30
über € 60.000	p

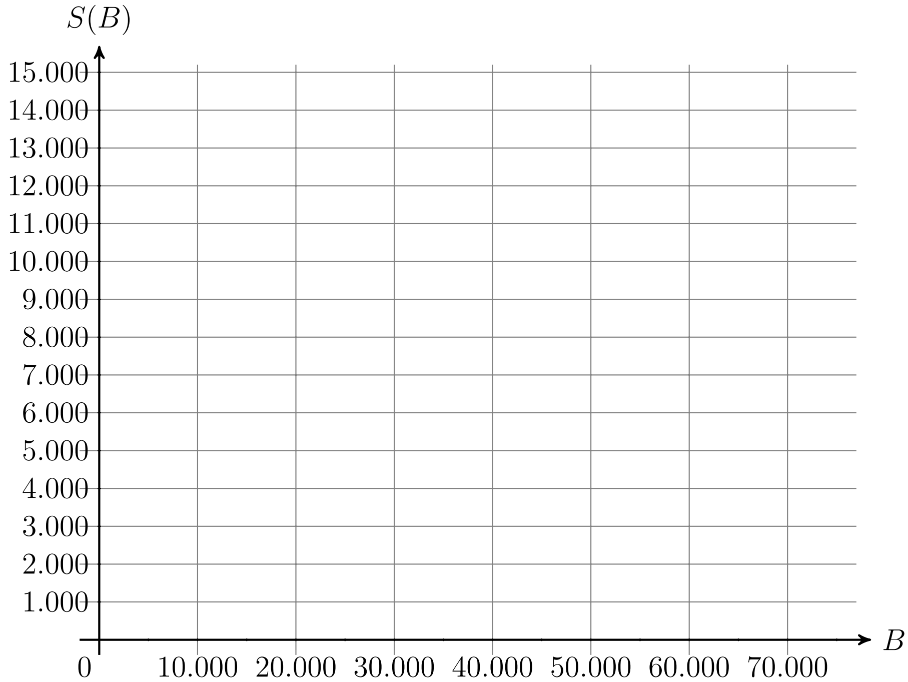
a) (3 Punkte) Nehmen Sie an, der Grenzsteuersatz p in der dritten Stufe beträgt 40 Prozent. Wie hoch ist dann das Nettoeinkommen falls jemand 70.000 Euro brutto verdient?

b) (5 Punkte) Stellen Sie eine lineare Funktion $S(B)$ für die zu bezahlenden Steuern bei einem Bruttogehalt B zwischen 30.000 und 60.000 Euro auf und zeichnen Sie den Graphen dieser Funktion in ihrem Definitionsbereich in untenstehendes Koordinatensystem.

Bestimmen Sie das notwendige Bruttogehalt B, wenn die zu bezahlenden Steuern $S(B) = 9.000$ Euro betragen.

c) (4 Punkte) Wie hoch müsste der Grenzsteuersatz p in der höchsten Steuerstufe sein, damit bei einem Bruttoeinkommen von $B = 240.000$ Euro die Gesamtsteuerlast 50% beträgt?

Ausführung Beispiel 4:

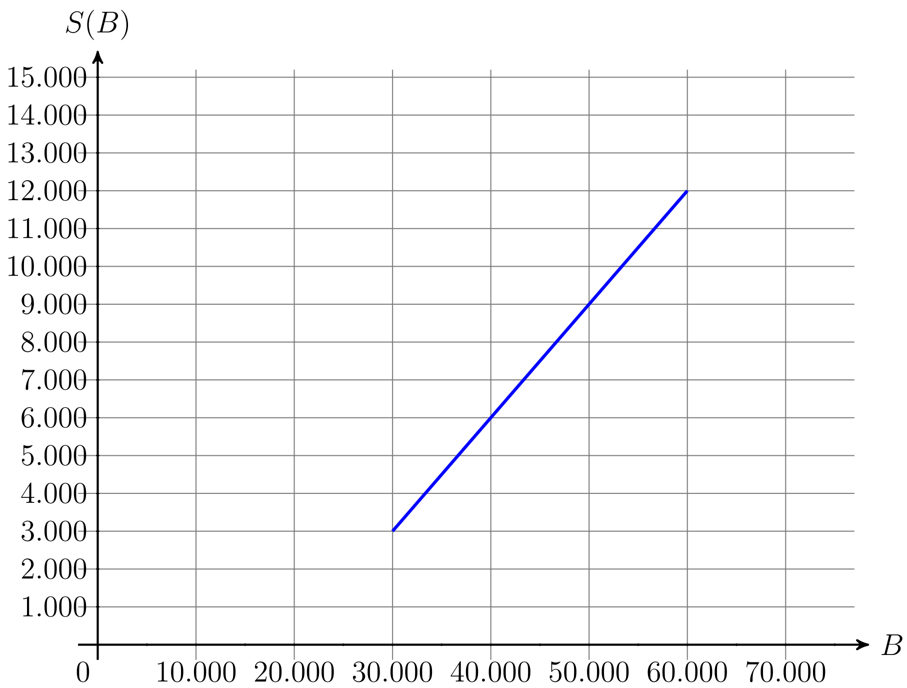


Ausführung Beispiel 4:

Lösung:

a) 54.000

b) Für die Steuern S in Abhängigkeit vom Bruttogehalt B gilt: $S(B) = 0,3 \cdot B - 6.000$



$B = 50.000$

c) 60%

5. Gegeben ist die Cobb-Douglas-Produktionsfunktion in zwei Variablen

$$f : {\mathbb{R}_+}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto \sqrt{x \cdot y^3}$$

a) (2 Punkte) Ist die Funktion f homogen? Wenn ja, von welchem Grad?

b) (4 Punkte) Bestimmen Sie alle Faktorkombinationen (x, y) für die die partielle Grenzproduktivität des Faktors y genau 9 beträgt.

c) (3 Punkte) Wie viele Einheiten von y muss man – ausgehend von der Stelle $(x, y) = (9, 4)$ – näherungsweise zusätzlich einsetzen, um eine Einheit von x zu ersetzen, wenn das Produktionsniveau dabei unverändert bleiben soll?

d) (3 Punkte) Berechnen Sie die partielle Faktorelastizität des Faktors x allgemein mit Hilfe der Differentialrechnung. Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Exponenten der Cobb-Douglas-Produktionsfunktion f und der partiellen Faktorelastizität des Faktors x?

Ausführung Beispiel 5:

Ausführung Beispiel 5:

Lösung:

a) homogen vom Grad 2

b) $f_y(x,y) = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{x \cdot y} = 9 \Rightarrow y = \frac{36}{x}$; $\left\{(x,y) \,\middle|\, y = \frac{36}{x}\right\}$

c) $r_{yx}(9,4) = \frac{4}{27}$

d) $\varepsilon_x = \frac{1}{2}$, Faktorelastizität von x entspricht dem Exponenten des Faktors x