Klausur Wirtschaftsmathematik VO

26. November 2022

Bitte leserlich in Druckbuchstaben ausfüllen!

NACHNAME:	
VORNAME:	
MATRIKELNUMMER:	

ERLAUBT: **nur** die Formelsammlung des Instituts!

VERBOTEN: **Taschenrechner** und **Handys** am Arbeitsplatz!

Aufgabe	**max. Punkte**	**erreichte Punkte**
1	11	
2	13	
3	12	
4	12	
5	12	
Summe	**60**	
Note:		

1. In einer Siedlung mit 180 Haushalten gibt es genau drei Heizsysteme: Photovoltaik, Öl und Wärmepumpe, wobei jeder Haushalt mindestens ein Heizsystem nutzt. Von den 180 befragten Haushalten gaben 23 an, mit einer Photovoltaikanlage zu heizen. Von diesen haben alle mindestens noch ein weiteres Heizsystem: 11 Eigentümer heizen zusätzlich mit Öl und 14 mit einer Wärmepumpe.

   147 Haushalte haben genau ein Heizsystem, 68 davon heizen nur mit Öl.

   a) (7 Punkte) Stellen Sie den Sachverhalt in einem Venn-Diagramms dar und bestimmen Sie die Mächtigkeit aller Teilmengen!

   b) (2 Punkte) Bestimmen Sie die Anzahl der Eigentümer, die eine Ölheizung und eine Wärmepumpe haben!

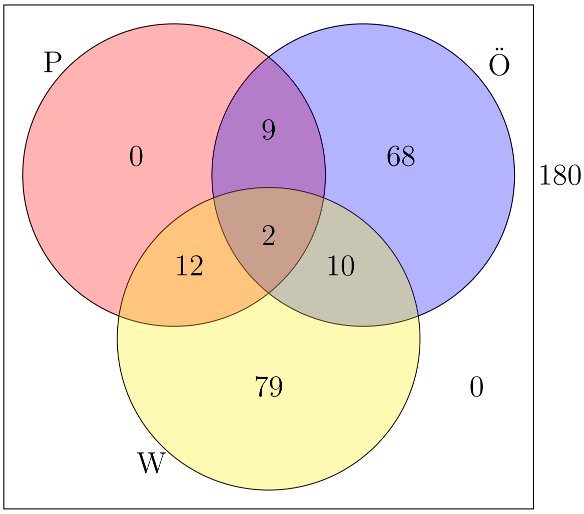
   c) (2 Punkte) Bestimmen Sie die Anzahl der Eigentümer, die genau zwei Heizsysteme haben!

   Ausführung Beispiel 1:

Ausführung Beispiel 1:

Lösung:

a)



b) 12

c) 31

2. Gegeben sind die Matrix A sowie die Spaltenvektoren b und y:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 6 \\ -1 & -1 & -4 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad y = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

   a) (7 Punkte) Ist der Vektor y die einzige Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$? Bestimmen Sie gegebenenfalls alle weiteren Lösungen des gegebenen Gleichungssystems.

   b) (6 Punkte) Bestimmen Sie für gegebene Matrizen die Matrix X, welche die folgende Matrizengleichung erfüllt:

$$X + 5 \cdot (b^T y)^T = \frac{3}{2}(X - E) + y^T A b$$

Ausführung Beispiel 2:

Ausführung Beispiel 2:

Lösung:

a) nein, das Gleichungssystem besitzt unendlich viele Lösungen

$$x = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \; t \in \mathbb{R}$$

b) $X = (23) = 23$

3. a) (5 Punkte) Bestimmen Sie den folgenden Grenzwert:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{8n^2+1}{2n-2} - \frac{4n^2-3n}{n+3} \right)$$

b) Gegeben ist die folgende geometrische Reihe

$$5 + 5 \cdot (1+2x)^{-1} + 5 \cdot (1+2x)^{-2} + 5 \cdot (1+2x)^{-3} + \ldots$$

i. (2 Punkte) Stellen Sie die Reihe mit Hilfe eines Summenzeichens dar.

ii. (3 Punkte) Für welches $x \in \mathbb{R}$ hat die Reihe den Wert 30?

iii. (2 Punkte) Ist die Reihe für $x = 2$ konvergent? Begründen Sie!

Ausführung Beispiel 3:

Ausführung Beispiel 3:

Lösung:

a) 19

b)

i. $5 \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+2x}\right)^{i}$

ii. $x = \frac{1}{10}$

iii. $x = 2 \Rightarrow q = \frac{1}{5}$; $\left|\frac{1}{5}\right| < 1$, daher ist die Reihe konvergent.

4. Die Kostenfunktion eines Betriebes kann näherungsweise durch die Funktion

$$K(x) = x^3 + b \cdot x^2 + 87x + 162$$

dargestellt werden. Die Preis-Absatz-Funktion lässt sich als lineare Funktion modellieren. Der Höchstpreis beträgt 168 Geldeinheiten und die Sättigungsmenge liegt bei 42 Mengeneinheiten.

   a) (2 Punkte) Wie lautet die Funktionsgleichung der Preis-Absatz-Funktion?

   b) (3 Punkte) Für welche Werte von b liegt der Wendepunkt der Kostenfunktion bei $x = 6$ Mengeneinheiten?

   Setzen Sie ab hier (unabhängig vom obigen Ergebnis) $b = -13$:

   c) (5 Punkte) Ermitteln Sie die gewinnmaximale Ausbringungsmenge!

   d) (2 Punkte) Wie hoch ist der Preis, der bei der gewinnmaximalen Ausbringungsmenge erzielt werden kann?

   Ausführung Beispiel 4:

Ausführung Beispiel 4:

Lösung:

a) $p(x) = -4x + 168$

b) $b = -18$

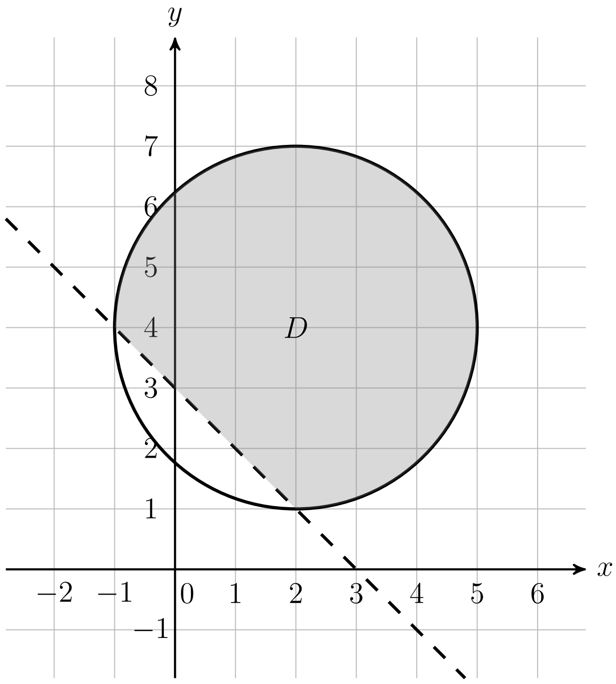
c) $x = 9$

d) $p\,(9) = 132$

5. Eine mehrdimensionale Funktion $f(x, y)$ in den Variablen x und y ist gegeben als:

$$f(x, y) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{8}{3}x^3 + 5x^2 + 2xy - y^2 + 3$$

Der Definitionsbereich dieser Funktion ist in nachfolgender Abbildung grau unterlegt dargestellt:



a) (3 Punkte) Geben Sie den Definitionsbereich der Funktion in beschreibender Form an.

b) (5 Punkte) Bestimmen Sie alle stationären Stellen der Funktion f im gegebenen Definitionsbereich.

c) (4 Punkte) Klassifizieren Sie nun alle im Definitionsbereich enthaltenen stationären Stellen.

Ausführung Beispiel 5:

Ausführung Beispiel 5:

Lösung:

a) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (y > -x + 3) \wedge ((x - 2)^2 + (y - 4)^2 \leq 9)\}$

b) $STS = (2, 2)$

c) $(2, 2)$ ist ein lokales Maximum