Wirtschaftsmathematik Formelsammlung

Stand Juni 2024

Binomische Formeln

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$$

Fakultät (Faktorielle)

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (n-1) \cdot n \qquad 0! = 1$$

Intervalle

Notation	Bezeichnung	enthält alle x mit
$]a;b[$ oder $(a;b)$	Offenes Intervall	$a < x < b$
$[a;b]$	Abgeschlossenes Intervall	$a \leq x \leq b$
$]a;b]$ oder $(a;b]$	Halboffenes Intervall	$a < x \leq b$
$[a;b[$ oder $[a;b)$	Halboffenes Intervall	$a \leq x < b$

$$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$$

$$\mathbb{R}_{++} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$$

Potenzen und Wurzeln

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \qquad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$
$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \qquad \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$
$$(a^m)^n = a^{m\cdot n} \qquad \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n\cdot m]{a}$$
$$(a\cdot b)^n = a^n \cdot b^n \qquad \sqrt[n]{a\cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \qquad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$a^1 = a$$
$$a^0 = 1$$
$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$0^x = 0$ wenn $x > 0$ und nicht definiert, wenn $x \leq 0$.

Definition des Logarithmus

$$\log_a x = u \Leftrightarrow x = a^u \quad (a > 0,\, x \in \mathbb{R}_{++})$$

a heißt Basis, x Numerus, u heißt „Logarithmus von x zur Basis a“.

Rechnen mit Logarithmen (bezüglich einer beliebigen Basis)

$$\log(u \cdot v) = \log u + \log v \qquad \log\frac{u}{v} = \log u - \log v$$

$$\log u^n = n \cdot \log u \qquad \log\sqrt[n]{u} = \frac{1}{n} \cdot \log u$$

$$\log 1 = 0 \qquad \log_a a = 1$$

Quadratische Gleichungen

Eine quadratische Gleichung der Form

$$ax^2 + bx + c = 0$$

mit $a \neq 0$ löst man mit

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Eine quadratische Gleichung der Form

$$x^2 + px + q = 0$$

löst man mit

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Sätze von Vieta

Wenn x_1 und x_2 Lösungen der Gleichung $x^2 + px + q = 0$ sind, so gilt:

$$x_1 + x_2 = -p$$
$$x_1 \cdot x_2 = q$$
$$x^2 + px + q = (x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

Kartesisches Produkt

$$A \times B = \{(x, y) \mid (x \in A) \wedge (y \in B)\}$$

Gesprochen: „A kreuz B“.
Die Elemente dieser Menge, (x, y), heißen **geordnete Paare**.

Das Summenzeichen

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Rechnen mit Summen

Rechenregeln für Summen

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)=\sum_{i=1}^{n}a_i+\sum_{i=1}^{n}b_i$$
$$\sum_{i=1}^{n}k\cdot a_i=k\cdot\sum_{i=1}^{n}a_i$$
$$\sum_{i=1}^{n}k=n\cdot k$$

Spezielle Summen

$$\sum_{i=1}^{n}i=\frac{n}{2}\cdot(n+1)$$
$$\sum_{i=1}^{n}i^2=\frac{1}{6}\cdot n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)$$
$$\sum_{i=1}^{n}i^3=\left[\frac{1}{2}\cdot n\cdot(n+1)\right]^2$$

Betrag eines Vektors

Gegeben ist der Vektor $a=(a_1,\,a_2,\,\ldots,\,a_n)\in\mathbb{R}^n$.
Dann definiert man den Betrag (die Länge) des Vektors durch:

$$|\,a\,|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}$$

Linearkombination von Vektoren

Unter einer **Linearkombination** versteht man die Summe von reellen Vielfachen verschiedener Vektoren.

$$b=\lambda_1\cdot a_1+\lambda_2\cdot a_2+\cdots+\lambda_n\cdot a_n$$

heißt **Linearkombination** der Vektoren $a_1,\,a_2,\,\ldots,\,a_n$, wobei $\lambda_1,\,\lambda_2,\,\ldots,\,\lambda_n$ reelle Zahlen sind.

Rechenregeln für Matrizen

$$A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C \qquad A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$$
$$(A+B)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C \qquad k\cdot(A\cdot B)=(k\cdot A)\cdot B=A\cdot(k\cdot B)$$
$$(A\cdot B)^T=B^T\cdot A^T \qquad E\cdot A=A\cdot E=A$$
$$\left(A^{-1}\right)^{-1}=A \qquad \left(A^T\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^T$$
$$(A\cdot B)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1} \qquad (k\cdot A)^{-1}=\frac{1}{k}\cdot A^{-1}$$

Inverse einer Matrix

Für eine quadratische Matrix A definiert man die **inverse Matrix** A^{-1} mit:

$$A^{-1}\cdot A=A\cdot A^{-1}=E$$

(E bezeichnet hier die entsprechende Einheitsmatrix)
Die Inverse A^{-1} einer quadratischen Matrix existiert nur, wenn deren Determinante ungleich 0 ist!

Determinanten (nur für quadratische Matrizen)

1. Ist $A = (a)$, so ist $\det(A) = a$
2. Ist $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, so ist $\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$
3. Für 3×3-Matrizen: Regel von Sarrus

Wert der Determinante für bestimmte Arten von Matrizen

- Sind in einer Zeile oder Spalte einer Matrix A alle Elemente gleich Null, so ist: $\det(A) = 0$
- Sind zwei Zeilen oder Spalten ein Vielfaches einer anderen Zeile oder Spalte, so ist: $\det(A) = 0$
- Ist eine Zeile oder Spalte eine Linearkombination anderer Zeilen oder Spalten, so ist: $\det(A) = 0$
- Ist A eine Dreiecksmatrix, so gilt: $\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}$

Lösen linearer Gleichungssysteme

Ein LGS ist lösbar wenn der Rang der Koeffizientenmatrix gleich dem Rang der erweiterten Matrix ist.

- Je zwei Gleichungen (= Zeilen des Gleichungssytems) dürfen miteinander vertauscht werden
- Jede Gleichung darf mit einer beliebigen von Null verschiedenen Zahl multipliziert werden.
- Zu jeder Gleichung darf ein beliebiges Vielfaches einer anderen Gleichung addiert werden.

Rang einer Matrix

Unter dem **Rang einer Matrix** A (Schreibweise: $r(A)$) versteht man die größte Anzahl linear unabhängiger Zeilen (oder Spalten) der Matrix A.

Lineare Unabhängigkeit von Vektoren

Die n Vektoren $a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_n$ aus dem m-dimensionalen Raum R^m heißen linear unabhängig, wenn die lineare Vektorgleichung

$$\lambda_1 \cdot a_1 + \lambda_2 \cdot a_2 + \ldots + \lambda_n \cdot a_n = 0$$

nur für $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$ erfüllt ist.
Dies bedeutet, es ist nicht möglich einen der Vektoren durch die anderen auszudrücken. Ist dies möglich, heißen die Vektoren linear abhängig.

Arithmetische und geometrische Folge

Arithmetische Folge

$$\langle a_1,\, a_1 + d,\, a_1 + 2d,\, a_1 + 3d,\, \ldots \rangle$$

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= d \\ a_n &= a_1 + (n-1) \cdot d \end{aligned}$$

$$\text{Partialsumme: } s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$$

Geometrische Folge

$$\langle a_1,\, a_1 \cdot q,\, a_1 \cdot q^2,\, a_1 \cdot q^3,\, \ldots \rangle$$

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= q \\ a_n &= a_1 \cdot q^{n-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Partialsumme: } s_n &= a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} & q \neq 1 \\ s_\infty &= a_1 \cdot \frac{1}{1-q} & |q| < 1 \end{aligned}$$

Reihen

Für eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt die Summe

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

die $n-$te Partialsumme der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Die Folge der Partialsummen $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt Reihe.
Man schreibt mit Hilfe des Summenzeichens – unabhängig davon, ob $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert – symbolisch

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i$$

Konvergenz einer Reihe

Eine Reihe ist konvergent, wenn die Folge der Partialsummen der zugrunde liegenden Folge konvergiert.

Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge und $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ die $n-$te Partialsumme, dann gilt:

- Konvergiert die Reihe $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge, d. h. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.
- Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge, so konvergiert die Reihe nicht. (d. h. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ist notwendig für die Konvergenz der zugehörigen Reihe).

Konvergenz einer geometrischen Reihe

Eine geometrische Reihe $\sum_{i=k}^{\infty} q^i$ ist konvergent, wenn $|\,q\,| < 1$ gilt. Der Wert der Reihe ist in diesem Fall gegeben durch:

$$S_\infty = \sum_{i=k}^{\infty} q^i = \frac{q^k}{1-q} \qquad \text{wenn } |\,q\,| < 1$$

Kapitalwert einer endlichen Rente

$$K = -CF_0 + \sum_{t=1}^{n} \frac{CF_t}{(1+i)^t} \qquad CF_t \ldots \text{Cashflow zum Zeitpunkt t, } i \ldots \text{Zinssatz}$$

Stetige Verzinsung für k Jahre

$$K_{end} = K_0 \cdot e^{i\cdot k}$$

Ableitungen einiger Funktionen

$f(x) = c$	$f'(x) = 0$	
$f(x) = x^n$	$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$	für $n \in \mathbb{R}$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$	
$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \cdot \ln(a)$	
$f(x) = \ln(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$	für $x \in \mathbb{R}_{++}$

Ableitungsregeln

$$
\begin{aligned}
(u \pm v)' &= u' \pm v' \\
(k \cdot u)' &= k \cdot u' && k \in \mathbb{R} \\
(u \cdot v)' &= u' \cdot v + u \cdot v' \\
\left(\frac{u}{v}\right)' &= \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2} \\
[h(g(x))]' &= h'(g(x)) \cdot g'(x)
\end{aligned}
$$

Regel von de l'Hospital

Wenn f und g differenzierbar an einer Stelle x_0 sind und $f(x_0) = 0$ und $g(x_0) = 0$ ist, gilt:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Auch anwendbar für unbestimmte Ausdrücke der Form $\frac{\infty}{\infty}$.
Kann auch mehrfach angewendet werden, solange die Voraussetzungen $\left(\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}\right)$ erfüllt sind.

Elastizität

$$\varepsilon_f(x) = \frac{f'(x) \cdot x}{f(x)}$$

$\varepsilon_f(x)$ gibt zu jeder Inputmenge näherungsweise an, wie stark der Output prozentual auf eine einprozentige Erhöhung dieser Inputmenge reagiert.

Grundintegrale

$$
\begin{aligned}
\int k \cdot dx &= k \cdot x + c \\
\int x^n dx &= \frac{x^{n+1}}{n+1} + c && \text{für } n \neq -1 \\
\int x^{-1} dx &= \ln|x| + c && \text{für } x \neq 0 \\
\int e^x dx &= e^x + c \\
\int e^{a \cdot x} dx &= \frac{1}{a} \cdot e^{a \cdot x} + c \\
\int a^x dx &= \frac{1}{\ln(a)} \cdot a^x + c && \text{für } a > 0,\ a \neq 1 \\
\int \ln(x)\, dx &= x \cdot \ln(x) - x + c
\end{aligned}
$$

Integrationsregeln

$$\int (f \pm g) \cdot dx = \int f\,dx \pm \int g\,dx$$
$$\int (k \cdot f)\,dx = k \cdot \int f\,dx$$

Homogenität

Eine Funktion $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt homogen vom Grad r, wenn es eine Zahl $r \in \mathbb{R}$ gibt, sodass für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^r \cdot f(x_1 . x_2, \ldots, x_n)$$

Gradient

Die Zusammenfassung aller n möglichen ersten partiellen Ableitungen in einem n-dimensionalen Zeilenvektor nennt man Gradient von f:

$$grad\,(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) = (f_{x_1}, f_{x_2}, \ldots, f_{x_n})$$

Der Gradient gibt die Richtung des größten Anstiegs von f an.

Richtungsableitung (normiert)

in Richtung des Vektors $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{|z|} \cdot grad\,(f) \cdot z = \frac{1}{|z|} \cdot (f_{x_1}, f_{x_2}) \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

Totales Differential

$$df = f_{x_1} \cdot dx_1 + f_{x_2} \cdot dx_2$$

Partielle Elastizität

$$\varepsilon_i = \frac{f_{x_i} \cdot x_i}{f}$$

Satz von Schwarz

Ist eine Funktion zweimal stetig partiell differenzierbar, so ist die Reihenfolge des Differenzierens egal. Es gilt also:

$$f_{x_i x_j} = f_{x_j x_i}$$

Hesse Matrix

Die Zusammenfassung der zweiten partiellen Ableitungen in einer quadratischen Matrix nennt man Hessematrix:

$$H(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} \\ f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} \end{pmatrix}$$

Extremwerte

Funktion	$f(x,y)$
Kandidaten für Extremstellen (stationäre Stellen)	$\left.\begin{matrix} f_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow (x_S, y_S)$
Maximum	$\det(H(x_S, y_S)) > 0 \quad \text{und} \quad f_{xx}(x_S, y_S) < 0$
Minimum	$\det(H(x_S, y_S)) > 0 \quad \text{und} \quad f_{xx}(x_S, y_S) > 0$
Sattelpunkt	$\det(H(x_S, y_S)) < 0$

Preiselastizität - Kreuzpreiselastizität

$$\varepsilon_{ii} = \frac{N^i_{p_i} \cdot p_i}{N^i} \qquad \varepsilon_{ij} = \frac{N^i_{p_j} \cdot p_j}{N^i}$$

Grenzrate der Substitution

$$r_{ij} = \left| \frac{f_{x_j}}{f_{x_i}} \right|$$

Cobb-Douglas-Produktionsfunktion

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c \cdot ({x_1}^{\alpha_1} \cdot \cdots \cdot {x_n}^{\alpha_n}) \qquad c > 0,\ \alpha_i > 0$$

Eigenschaften einer Cobb-Douglas-Produktionsfunktion

- Eine derartige Produktionsfunktion ist homogen vom Grad $r = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i$
- Die Grenzproduktivität des i-ten Faktors beträgt: $f_{x_i} = \alpha_i \cdot \frac{f}{x_i}$
- Jede Faktorelastizität ist konstant und beträgt: $\varepsilon_j = \alpha_j$
- Die Grenzrate der Substitution ist gegeben durch: $r_{ij} = \frac{\alpha_j}{\alpha_i} \cdot \frac{x_i}{x_j}$