

# Wirtschaftsmathematik Formelsammlung

Stand Februar 2021

## Binomische Formeln

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

## Fakultät (Faktorielle)

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (n - 1) \cdot n$$

## Intervalle

Notation	Bezeichnung	enthält alle $x$ mit
$]a; b[$ oder $(a; b)$	Offenes Intervall	$a < x < b$
$[a; b]$	Abgeschlossenes Intervall	$a \leq x \leq b$
$]a; b]$ oder $(a; b]$	Halboffenes Intervall	$a < x \leq b$
$[a; b[$ oder $[a; b)$	Halboffenes Intervall	$a \leq x < b$

$$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$$

$$\mathbb{R}_{++} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$$

## Potenzen und Wurzeln

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$$

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$a^1 = a$$

$$a^0 = 1$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$0^x = 0$  wenn  $x > 0$  und nicht definiert, wenn  $x \leq 0$ !

## Definition des Logarithmus

$$\log_a x = u \Leftrightarrow x = a^u \quad (a > 0, x \in \mathbb{R}_{++})$$

$a$  heißt Basis,  $x$  Numerus,  $u$  heißt „Logarithmus von  $x$  zur Basis  $a$ “.

## Rechnen mit Logarithmen (bezüglich einer beliebigen Basis)

$$\log(u \cdot v) = \log u + \log v$$

$$\log \frac{u}{v} = \log u - \log v$$

$$\log u^n = n \cdot \log u$$

$$\log \sqrt[n]{u} = \frac{1}{n} \cdot \log u$$

$$\log 1 = 0$$

$$\log_a a = 1$$

## Quadratische Gleichungen

Eine quadratische Gleichung der Form

$$ax^2 + bx + c = 0$$

mit  $a \neq 0$  löst man mit

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Eine quadratische Gleichung der Form

$$x^2 + px + q = 0$$

löst man mit

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

## Sätze von Vieta

Wenn  $x_1$  und  $x_2$  Lösungen der Gleichung  $x^2 + px + q = 0$  sind, so gilt:

$$x_1 + x_2 = -p$$

$$x_1 \cdot x_2 = q$$

$$x^2 + px + q = (x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

## Kartesisches Produkt

$$A \times B = \{(x, y) \mid (x \in A) \wedge (y \in B)\}$$

Gesprochen: „A kreuz B“.

Die Elemente dieser Menge,  $(x, y)$ , heißen **geordnete Paare**.

## Das Summenzeichen

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i$$

## Rechnen mit Summen

### Rechenregeln für Summen

$$\sum_{i=1}^n (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i$$

$$\sum_{i=1}^n k \cdot a_i = k \cdot \sum_{i=1}^n a_i$$

$$\sum_{i=1}^n k = n \cdot k$$

### Spezielle Summen

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n}{2} \cdot (n + 1)$$

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{6} \cdot n \cdot (n + 1) \cdot (2n + 1)$$

$$\sum_{i=1}^n i^3 = \left[ \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n + 1) \right]^2$$

## Betrag eines Vektors

Gegeben ist der Vektor  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ .

Dann definiert man den Betrag (die Länge) des Vektors durch:

$$|a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$$

## Linearkombination von Vektoren

Unter einer **Linearkombination** versteht man die Summe von reellen Vielfachen verschiedener Vektoren.

$$b = \lambda_1 \cdot a_1 + \lambda_2 \cdot a_2 + \dots + \lambda_n \cdot a_n$$

heißt **Linearkombination** der Vektoren  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , wobei  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  reelle Zahlen sind.

## Rechenregeln für Matrizen

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$$

$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$$

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

$$k \cdot (A \cdot B) = (k \cdot A) \cdot B = A \cdot (k \cdot B)$$

$$E \cdot A = A \cdot E = A$$

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

$$(k \cdot A)^{-1} = \frac{1}{k} \cdot A^{-1}$$

## Inverse einer Matrix

Für eine quadratische Matrix  $A$  definiert man die **inverse Matrix**  $A^{-1}$  mit:

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$$

( $E$  bezeichnet hier die entsprechende Einheitsmatrix)

Die Inverse  $A^{-1}$  einer quadratischen Matrix existiert nur, wenn deren Determinante ungleich 0 ist!

## Determinanten (nur für quadratische Matrizen)

1. Ist  $A = (a)$ , so ist  $\det(A) = a$
2. Ist  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ , so ist  $\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$
3. Für  $3 \times 3$ -Matrizen: Regel von Sarrus
4. Für alle Matrizen: Laplace'scher Entwicklungssatz
  - a) Entwicklung nach der  $j$ -ten Spalte:  $\det(A) = \sum_{k=1}^n a_{kj} \cdot d_{kj}$
  - b) Entwicklung nach der  $i$ -ten Zeile:  $\det(A) = \sum_{\ell=1}^n a_{i\ell} \cdot d_{i\ell}$

dabei ist  $d_{ij}$  die Adjunkte zum Element  $a_{ij}$  gegeben durch:  $d_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det(D_{ij})$  mit der Teilmatrix  $D_{ij}$ , die durch Streichen der  $i$ -ten Zeile und der  $j$ -ten Spalte entsteht.

## Wert der Determinante für bestimmte Arten von Matrizen

- Sind in einer Zeile oder Spalte einer Matrix  $A$  alle Elemente gleich Null, so ist:  $\det(A) = 0$
- Sind zwei Zeilen oder Spalten ein Vielfaches einer anderen Zeile oder Spalte, so ist:  $\det(A) = 0$
- Ist eine Zeile oder Spalte eine Linearkombination anderer Zeilen oder Spalten, so ist:  $\det(A) = 0$
- Ist  $A$  eine Dreiecksmatrix, so gilt:  $\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}$

## Lösen linearer Gleichungssysteme

Ein LGS ist lösbar wenn der Rang der Koeffizientenmatrix gleich dem Rang der erweiterten Matrix ist.

- Je zwei Gleichungen (= Zeilen des Gleichungssystems) dürfen miteinander vertauscht werden
- Jede Gleichung darf mit einer beliebigen von Null verschiedenen Zahl multipliziert werden.
- Zu jeder Gleichung darf ein beliebiges Vielfaches einer anderen Gleichung addiert werden.

## Rang einer Matrix

Unter dem **Rang einer Matrix**  $A$  (Schreibweise:  $r(A)$ ) versteht man die größte Anzahl linear unabhängiger Zeilen (oder Spalten) der Matrix  $A$ .

## Lineare Unabhängigkeit von Vektoren

Die  $n$  Vektoren  $a_1, a_2, \dots, a_n$  aus dem  $m$ -dimensionalen Raum  $R^m$  heißen linear unabhängig, wenn die lineare Vektorgleichung

$$\lambda_1 \cdot a_1 + \lambda_2 \cdot a_2 + \dots + \lambda_n \cdot a_n = 0$$

nur für  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$  erfüllt ist.

Dies bedeutet, es ist nicht möglich einen der Vektoren durch die anderen auszudrücken. Ist dies möglich, heißen die Vektoren linear abhängig.

## Arithmetische und geometrische Folge

### Arithmetische Folge

$$\langle a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, a_1 + 3d, \dots \rangle$$

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= d \\ a_n &= a_1 + (n-1) \cdot d \end{aligned}$$

$$\text{Partialsomme: } s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$$

### Geometrische Folge

$$\langle a_1, a_1 \cdot q, a_1 \cdot q^2, a_1 \cdot q^3, \dots \rangle$$

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= q \\ a_n &= a_1 \cdot q^{n-1} \end{aligned}$$

$$\text{Partialsomme: } s_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} \quad q \neq 1$$

$$s_\infty = a_1 \cdot \frac{1}{1 - q} \quad |q| < 1$$

## Definition Grenzwert einer Folge

Die Zahl  $a$  heißt Grenzwert oder Limes der Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  geschrieben  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)$ , wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \text{ so, dass } a_k \in ]a - \varepsilon, a + \varepsilon[ \text{ für alle } k \geq n(\varepsilon)$$

## Reihen

Für eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  heißt die Summe

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i$$

die  $n$ -te Partialsomme der Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

Die Folge der Partialsummen  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  heißt Reihe.

Man schreibt mit Hilfe des Summenzeichens – unabhängig davon, ob  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert – symbolisch

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i$$

## Konvergenz einer Reihe

Eine Reihe ist konvergent, wenn die Folge der Partialsummen der zugrunde liegenden Folge konvergiert.

Ist  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge und  $S_n = \sum_{i=1}^n a_i$  die  $n$ -te Partialsumme, dann gilt:

- Konvergiert die Reihe  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , so ist  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Nullfolge, d. h.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .
- Ist  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  keine Nullfolge, so konvergiert die Reihe nicht. (d. h.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  ist notwendig für die Konvergenz der zugehörigen Reihe).

## Konvergenz einer geometrischen Reihe

Eine geometrische Reihe  $\sum_{i=k}^{\infty} q^i$  ist konvergent, wenn  $|q| < 1$  gilt. Der Wert der Reihe ist in diesem Fall gegeben durch:

$$S_{\infty} = \sum_{i=k}^{\infty} q^i = \frac{q^k}{1-q} \quad \text{wenn } |q| < 1$$

## Kapitalwert einer endlichen Rente

$$K = -CF_0 + \sum_{t=1}^n \frac{CF_t}{(1+i)^t} \quad CF_t \dots \text{Cashflow zum Zeitpunkt } t, i \dots \text{Zinssatz}$$

## Stetige Verzinsung für $k$ Jahre

$$K_{end} = K_0 \cdot e^{i \cdot k}$$

## Ableitungen einiger Funktionen

$f(x) = c$	$f'(x) = 0$	
$f(x) = x^n$	$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$	für $n \in \mathbb{R}$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$	
$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \cdot \ln(a)$	
$f(x) = \ln(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$	für $x \in \mathbb{R}_{++}$

## Ableitungsregeln

$$\begin{aligned}(u \pm v)' &= u' \pm v' \\ (k \cdot u)' &= k \cdot u' && k \in \mathbb{R} \\ (u \cdot v)' &= u' \cdot v + u \cdot v' \\ \left(\frac{u}{v}\right)' &= \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2} \\ [h(g(x))]' &= h'(g(x)) \cdot g'(x)\end{aligned}$$

## Regel von de l'Hospital

Wenn  $f$  und  $g$  differenzierbar an einer Stelle  $x_0$  sind und  $f(x_0) = 0$  und  $g(x_0) = 0$  ist, gilt:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Auch anwendbar für unbestimmte Ausdrücke der Form  $\frac{\infty}{\infty}$ .

Kann auch mehrfach angewendet werden, solange die Voraussetzungen  $(\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty})$  erfüllt sind.

## Elastizität

$$\varepsilon_f(x) = \frac{f'(x) \cdot x}{f(x)}$$

$\varepsilon_f(x)$  gibt zu jeder Inputmenge näherungsweise an, wie stark der Output prozentual auf eine einprozentige Erhöhung dieser Inputmenge reagiert.

## Grundintegrale

$$\begin{aligned}\int k \cdot dx &= k \cdot x + c \\ \int x^n dx &= \frac{x^{n+1}}{n+1} + c && \text{für } n \neq -1 \\ \int x^{-1} dx &= \ln |x| + c && \text{für } x \neq 0 \\ \int e^x dx &= e^x + c \\ \int e^{a \cdot x} dx &= \frac{1}{a} \cdot e^{a \cdot x} + c \\ \int a^x dx &= \frac{1}{\ln(a)} \cdot a^x + c && \text{für } a > 0, a \neq 1 \\ \int \ln(x) dx &= x \cdot \ln(x) - x + c\end{aligned}$$

## Integrationsregeln

$$\int (f \pm g) \cdot dx = \int f dx \pm \int g dx$$
$$\int (k \cdot f) dx = k \cdot \int f dx$$

## Taylorpolynom

Näherungsweise Darstellung einer Funktion an einer Stelle  $x_0$ :

$$f(x) \approx p(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k =$$
$$= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n$$

## Homogenität

Eine Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  heißt homogen vom Grad  $r$ , wenn es eine Zahl  $r \in \mathbb{R}$  gibt, sodass für alle  $\lambda \in \mathbb{R}$  gilt:

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) = \lambda^r \cdot f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

## Gradient

Die Zusammenfassung aller  $n$  möglichen ersten partiellen Ableitungen in einem  $n$ -dimensionalen Zeilenvektor nennt man Gradient von  $f$ :

$$\text{grad}(f) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) = (f_{x_1}, f_{x_2}, \dots, f_{x_n})$$

Der Gradient gibt die Richtung des größten Anstiegs von  $f$  an.

## Richtungsableitung (normiert)

in Richtung des Vektors  $z \in \mathbb{R}^n$ :

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x) = \frac{1}{|z|} \cdot \text{grad}(f)(x) \cdot z$$

## Totales Differential

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \cdot dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \cdot dx_n$$

## Partielle Elastizität

$$\varepsilon_i(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{x_i}{f}$$

## Satz von Schwarz

Ist eine Funktion zweimal stetig partiell differenzierbar, so ist die Reihenfolge des Differenzierens egal. Es gilt also:

$$f_{x_i x_j} = f_{x_j x_i}$$

## Hesse Matrix

Die Zusammenfassung der zweiten partiellen Ableitungen in einer quadratischen Matrix nennt man Hessematrix:

$$H(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} f_{x_1 x_1} & f_{x_1 x_2} \\ f_{x_2 x_1} & f_{x_2 x_2} \end{pmatrix}$$

## Extremwerte

Funktion	$f(x, y)$
Kandidaten für Extremstellen (stationäre Stellen)	$\left. \begin{matrix} f_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow (x_S, y_S)$
Maximum	$\det(H(x_S, y_S)) > 0$ und $f_{xx}(x_S, y_S) < 0$
Minimum	$\det(H(x_S, y_S)) > 0$ und $f_{xx}(x_S, y_S) > 0$
Sattelpunkt	$\det(H(x_S, y_S)) < 0$

## Preiselastizität - Kreuzpreiselastizität

$$\varepsilon_{ii} = N_{p_i}^i \cdot \frac{p_i}{N^i} \quad \varepsilon_{ij} = N_{p_j}^i \cdot \frac{p_j}{N^i}$$

## Grenzrate der Substitution

$$r_{ij} = \left| \frac{f_{x_j}}{f_{x_i}} \right|$$

## Cobb-Douglas-Produktionsfunktion

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c \cdot (x_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n}) \quad c > 0, \alpha_i > 0$$

## Eigenschaften einer Cobb-Douglas-Produktionsfunktion

- Eine derartige Produktionsfunktion ist homogen vom Grad  $\sum_{i=1}^n \alpha_i$
- Die Grenzproduktivität des  $i$ -ten Faktors beträgt:  $f_{x_i} = \alpha_i \cdot \frac{f}{x_i}$
- Jede Faktorelastizität ist konstant und beträgt:  $\varepsilon_j = \alpha_j$
- Die Grenzrate der Substitution ist gegeben durch:  $r_{ij} = \frac{\alpha_j}{\alpha_i} \cdot \frac{x_i}{x_j}$