

Statistik – Übungen SS 2026

Blatt 3: Schließende Statistik

Parameterschätzung, Konfidenzintervalle

1. Lebensmittelpackungen werden normalerweise durch Maschinen abgefüllt, bei denen die Soll-Füllmenge eingestellt werden kann. Die Menge, die tatsächlich abgefüllt wird, wird allerdings in der Regel ein wenig variieren. Da die tatsächlichen Füllmengen aus Verbraucherschutzgründen nicht zu stark von der Soll-Füllmenge abweichen dürfen, führen die staatlichen Eichämter Kontrollen anhand von zufälligen Stichproben durch. Die Einhaltung der Soll-Füllmenge soll durch die Schätzung des Mittelwertes inklusive der Berechnung eines Konfidenzintervalls überprüft werden.

Eine Molkerei liefert an eine Lebensmittelkette jeden Werktag 50.000 Flaschen Milch mit einer Soll-Füllmenge von je 1.000 ml.

Der letzten Lieferung wurden 25 Flaschen entnommen; in dieser Stichprobe betrug die durchschnittliche Füllmenge $\bar{x} = 1000,55$ ml. Aufgrund zahlreicher Kontrollen weiß man, dass die Ist-Füllmenge normalverteilt ist mit einer Standardabweichung von $\sigma = 10$ ml.

- a) Bestimmen Sie ein zweiseitiges 95 %-Konfidenzintervall für die durchschnittliche Füllmenge der 50.000 Flaschen.
 - b) Bestimmen Sie ein nach unten begrenztes 95 %-Konfidenzintervall für μ .
 - c) Angenommen man möchte erreichen, dass das zweiseitige 95 %-Konfidenzintervall höchstens 2 ml breit ist. Welcher Stichprobenumfang wäre dazu nötig?
2. **P 28** In einem Logistikzentrum werden Pakete automatisch auf Förderbändern transportiert. Die Geschwindigkeit der Förderbänder lässt sich einstellen, schwankt aber aufgrund mechanischer Einflüsse geringfügig. Aus Sicherheitsgründen soll die durchschnittliche Bandgeschwindigkeit regelmäßig überprüft werden.
Die Bandgeschwindigkeit X (in m/min) ist normalverteilt mit unbekanntem Erwartungswert μ und bekannter Standardabweichung $\sigma = 4$. In einer Stichprobe von $n = 36$ zufällig ausgewählten Zeitintervallen wurde eine durchschnittliche Geschwindigkeit von $\bar{x} = 72,5$ m/min gemessen.
 - a) Bestimmen Sie ein zweiseitiges 90 %-Konfidenzintervall für die wahre durchschnittliche Bandgeschwindigkeit μ .
 - b) Angenommen, für ein zweiseitiges 90 %-Konfidenzintervall erhält man das Intervall $[71,764; 73,236]$. Welcher Stichprobenumfang liegt diesem Intervall zugrunde?

3. Bei einem Statistik-Kurztest wurde die Bearbeitungszeit der gestellten Aufgaben bei einer Gruppe von 10 Studierenden gemessen. Es kann davon ausgegangen werden, dass die Bearbeitungszeiten stochastisch unabhängig und identisch normalverteilt sind. Es ergaben sich folgende Werte (Angaben in Minuten):

36	42	31	41	33	44	28	36	29	31
----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

- a) Geben Sie einen Schätzwert für die zu erwartende durchschnittliche Bearbeitungszeit an.
- b) Bestimmen Sie ein zweiseitiges 90 %-Konfidenzintervall für die durchschnittliche Bearbeitungszeit eines Statistik-Kurztests.
- c) Wie ändert sich (bei ansonsten unveränderten Bedingungen) das in b) berechnete Konfidenzintervall, wenn
- bei 100 Studierenden gemessen wird
 - bei 10 Studierenden ein 95 %-Konfidenzintervall bestimmt wird? (Nur Begründung, keine Rechnung!)
4. P 29 An einer Hochschule wird im Rahmen einer Evaluation die durchschnittliche Zufriedenheit mit einem neuen E-Learning-System erhoben. Die Zufriedenheit wird mit Hilfe eines standardisierten Tests gemessen.

Eine Vorstudie mit $n = 20$ Studierenden ergab einen Mittelwert von $\bar{x} = 3,6$ und eine Stichprobenstandardabweichung von $s = 0,8$. Es kann angenommen werden, dass die Zufriedenheit approximativ normalverteilt ist.

- a) Bestimmen Sie ein zweiseitiges 95 %-Konfidenzintervall für den Erwartungswert der Zufriedenheit.
- b) Wie ändert sich bei gleicher Vorstudie das Konfidenzintervall, wenn Sie statt 95 % ein Konfidenzniveau von 80 % wählen? (Nur Begründung, keine Rechnung.)

5. Vor den Wahlen möchte man den relativen Anteil der Wähler einer bestimmten Partei an der Gesamtheit aller Wähler feststellen. Im Zuge einer Umfrage gaben 234 von 1000 befragten Personen an, Partei A wählen zu wollen. Bei der darauffolgenden Wahl lag der tatsächliche Anteil der Personen, die die Partei A gewählt haben, bei 29,5 %.
- Ermitteln Sie auf Basis dieses Umfrageergebnisses ein symmetrisches 95 %-Konfidenzintervall für den (unbekannten) Stimmenanteil der Partei A und geben Sie an, ob der tatsächliche Anteil in diesem Intervall enthalten ist.
 - Welchen Stichprobenumfang würden Sie in der Vorbereitungsphase der Erhebung empfehlen, wenn noch keine Informationen über den Stimmenanteil der Partei A vorliegen und die Forderung gestellt ist, dass das Konfidenzintervall bei einem Konfidenzniveau von 0,95 höchstens die Länge 0,08 haben soll?
 - Sie lesen in einer Zeitschrift, dass in einer anderen Umfrage in einer Stichprobe von $n = 600$ Befragten ein empirischer Anteil von $p = 30\%$ erhoben wurde, und dass daraus abgeleitet werden kann, dass der unbekannte Anteil in der Grundgesamtheit daher durch ein Intervall von 29 % bis 31 % abgedeckt wird. Welches Konfidenzniveau würde sich daraus ergeben?
6. **P 30** In einer Stadt soll der Anteil der Haushalte ermittelt werden, die regelmäßig Bio-Produkte kaufen. Man führt eine Befragung durch und erhält ein 95 %-Konfidenzintervall für den Anteil der Biokäufer von $[0,38; 0,46]$.
- Bestimmen Sie den empirischen Anteil \hat{p} der Biokäufer sowie die Länge des Konfidenzintervalls.
 - Berechnen Sie den Stichprobenumfang n , der diesem Intervall zugrunde liegt.
 - Wie würde sich das Intervall bei gleichem Stichprobenumfang verändern, wenn man ein Konfidenzniveau von 99 % statt 95 % wählt? (Begründen Sie ohne Rechnung.)

Hypothesentests – parametrische Einstichprobentests

7. Die beim USI-Fest ausgeschenkte Füllmenge X der Biergläser wird als normalverteilt mit einer Standardabweichung von $\sigma = 12$ ml angesehen. Um zu überprüfen, ob die mittlere Füllmenge von 500 ml noch eingehalten wird, werden zehn abgefüllte Gläser zufällig ausgewählt und die Füllmenge kontrolliert. Die Stichprobe lieferte die folgenden Werte (Angaben in ml):

471	501	490	510	473	512	486	504	481	494
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

- Testen Sie zum Niveau $\alpha = 0,1$ die Nullhypothese
 $H_0 : \mu = 500$ gegen $H_1 : \mu \neq 500$
- Innerhalb welcher Grenzen muss der beobachtete Mittelwert liegen, damit die Nullhypothese nicht verworfen wird?

8. **P 31** Für die Dauer einer Arztkonsultation in einer Praxis wurde in den letzten Jahren ein durchschnittlicher Wert von 15 Minuten angenommen, mit einer bekannten Varianz von $\sigma^2 = 9$. Durch organisatorische Maßnahmen soll die durchschnittliche Konsultationsdauer reduziert werden.

In einer Stichprobe der letzten 25 Konsultationen ergibt sich ein Mittelwert von $\bar{x} = 13,9$ Minuten.

- a) Lässt sich aufgrund dieser Daten zum Niveau $\alpha = 0,01$ zeigen, dass die durchschnittliche Konsultationsdauer gesunken ist? Formulieren Sie geeignete Hypothesen und führen Sie den Test durch.
- b) Bestimmen Sie den zugehörigen p-Wert und interpretieren Sie ihn im Kontext.
9. **P 32** In einer Studie zur Feinstaubbelastung in Büroräumen werden an einem Standort an 10 zufällig ausgewählten Tagen Tagesmittelwerte der Feinstaubkonzentration (in $\mu\text{g}/\text{m}^3$) gemessen. Man erhält die folgenden Werte:

24,3	22,8	25,6	27,1	20,5	22,5	26,3	27,1	25,2	20,9
------	------	------	------	------	------	------	------	------	------

Nach gesetzlichen Vorgaben soll der Mittelwert der Feinstaubbelastung μ höchstens $22 \mu\text{g}/\text{m}^3$ betragen. Gehen Sie davon aus, dass die Messwerte normalverteilt sind.

Prüfen Sie anhand der Messdaten, ob der wahre Mittelwert μ der Feinstaubbelastung signifikant größer als der gesetzliche Grenzwert von $22 \mu\text{g}/\text{m}^3$ ist. Formulieren Sie geeignete Hypothesen und führen Sie einen geeigneten Test durch ($\alpha = 0,05$). Wie lautet Ihre Entscheidung im gegebenen Kontext?

10. Eine Verbraucherzentrale möchte überprüfen, ob ein bestimmtes Medikament Übelkeit bei den Konsumentinnen und Konsumenten auslöst. In einer Studie mit zehn Personen wird bei sieben Personen nach dem Genuss dieses Medikaments eine auftretende Übelkeit registriert.
- a) Überprüfen Sie zum Signifikanzniveau $\alpha = 0,05$ die statistische Nullhypothese, dass der Anteil der Personen mit Übelkeitssymptomen nach dem Genuss dieses Produkts in der Grundgesamtheit höchstens 50% beträgt.
- b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Stichprobe mit 10 Personen bei mindestens 7 nach dem Genuss des Medikaments eine auftretende Übelkeit registriert wird, wenn in Wirklichkeit (d. h. in der Grundgesamtheit) der Anteil der Personen mit Übelkeitssymptomen nach dem Genuss dieses Produkts 50% beträgt (p-Wert)?

11. **P 33** In einer Grundschule wird überprüft, ob weniger als 30 % der Kinder an einer bestimmten Sehschwäche leiden. In einer Stichprobe von 20 Kindern weisen 4 Kinder die Sehschwäche auf.
- Formulieren Sie geeignete Hypothesen und testen Sie zum Signifikanzniveau $\alpha = 0,1$, ob die Aussage „weniger als 30 % der Kinder leiden an dieser Sehschwäche“ statistisch nachgewiesen werden kann.
 - Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Stichprobe von $n = 20$ Kindern höchstens 4 die Sehschwäche aufweisen, falls der wahre Anteil $p = 0,3$ beträgt.

Zweistichprobentests, parametrisch

12. Eine Molkerei produziert unter anderem zwei unterschiedliche Milchvarianten: Vollmilch mit 3,5 % Fettgehalt, sowie fettarme Milch mit einem Fettgehalt von 1,5 %. Bei einer Analyse der beiden Varianten ergaben sich über acht Wochen folgende Verkaufszahlen für 1-Liter-Packungen:

Vollmilch (X)	9170	7540	8456	9852	7990	8754	8853	8741
Fettarme Milch (Y)	8723	8140	8012	9285	7842	7663	8215	8146

Zudem ergab die statistische Analyse, dass die Verkaufszahlen jeweils als Realisationen einer normalverteilten Zufallsgröße aufgefasst werden können.

- Prüfen Sie auf einem Signifikanzniveau von 0,05 mit Hilfe eines geeigneten Verfahrens, ob die Varianzen der wöchentlichen Verkaufszahlen gleich sind.
 - Lässt sich mit einem Signifikanzniveau von 0,05 zeigen, dass die wöchentlichen Verkaufszahlen bei fettarmer Milch im Durchschnitt signifikant niedriger ausfallen als bei Vollmilch?
 - Bestimmen Sie den p-Value zu Aufgabe b).
13. **P 34** Eine Sprachschule bietet einen Standardkurs „Englisch A2“ in Präsenz und als Live-Online-Variante an. Um zu überprüfen, ob die beiden Formate bezüglich des Lernerfolgs gleichwertig sind, werden die erreichten Punkte bei einem Einstufungstest betrachtet. Es ergeben sich:

Format	Stichprobenmittelwert	Stichprobenstandardabweichung
Präsenz ($n_1 = 41$)	$\bar{x}_1 = 18,4$	$s_1 = 4,1$
Online ($n_2 = 31$)	$\bar{x}_2 = 17,1$	$s_2 = 4,6$

Eine Analyse ergab, dass die Punkte jeweils als Realisationen einer normalverteilten Zufallsgröße aufgefasst werden können.

Testen Sie mit einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0,1$ die Hypothese, dass die Präsenzvariante eine höhere durchschnittliche Punktezahl erbringt als die Online-Variante.

14. **P 35** Ein Forschungsinstitut untersucht die durchschnittliche Miete von Studentenzimmern in zwei verschiedenen Universitätsstädten. Eine Explorationsanalyse der Stichprobendaten ergab:
- Die Mieten können jeweils als näherungsweise normalverteilt angesehen werden.
 - Ein F-Test zeigt, dass die Varianzen der Mieten in den beiden Städten nicht als gleich angenommen werden können (Varianzhomogenität ist abzulehnen).
- a) Welcher Test ist anzuwenden, wenn überprüft werden soll, ob sich die durchschnittliche Miete in den beiden Städten unterscheidet? Begründen Sie ausführlich.
- b) Formulieren Sie die Hypothesen dieses Tests.
- c) Angenommen, Sie erhalten einen p-Wert von $p = 0,029$. Wie würden Sie auf einem Signifikanzniveau von 0,05 entscheiden?
15. Um den Einfluss der Bereifung auf den Treibstoffverbrauch von Pkws zu untersuchen, wurden 10 Fahrzeuge zunächst mit Reifensorte X ausgestattet und der Treibstoffverbrauch auf 100 km gemessen. Auf dieselben Fahrzeuge wurden dann die Reifen der Sorte Y montiert und erneut der Treibstoffverbrauch gemessen. Die dabei erhobenen Daten sind in folgender Tabelle zusammengefasst (in Liter pro 100 km):

Pkw ID	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X	11,1	9,1	8,0	11,4	8,9	7,6	8,7	6,8	9,9	7,5
Y	10,4	8,7	7,8	10,3	9,1	7,3	7,9	6,2	8,4	6,8

Lässt sich damit bei einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0,05$ statistisch nachweisen, dass der Treibstoffverbrauch bei Verwendung von Reifensorte Y niedriger ist als bei Verwendung von Sorte X , wenn angenommen werden kann, dass der Treibstoffverbrauch in der Grundgesamtheit normalverteilt ist?

16. **P 36** Eine neue Konzentrations-App soll die Reaktionszeit von Nutzerinnen bei einer einfachen Reaktionsaufgabe verbessern. 12 Probandinnen absolvieren zu Beginn einen Reaktionstest am Computer. Dabei wird die mittlere Reaktionszeit (in Millisekunden) über viele Durchgänge gemessen. Anschließend nutzen sie 14 Tage lang täglich die App. Danach absolvieren sie denselben Reaktionstest erneut. Für jede teilnehmende Person wurde die Differenz zwischen der mittleren Reaktionszeit ohne App (X) und mit Verwendung der App (Y) berechnet ($d_i = y_i - x_i$):

Teilnehmerinnen ID	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Differenz ($d_i = y_i - x_i$)	-16	-14	-25	20	-17	22	-33	12	24	-28	0	-26

Es kann angenommen werden, dass die Differenzen der Reaktionszeiten normalverteilt sind.

Testen Sie bei einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0,05$, ob die Verwendung der App zu einer kürzeren durchschnittlichen Reaktionszeit führt.

Zweistichprobentests, nicht parametrisch

17. An der SOWI-Fakultät der KF-Uni Graz nahmen im Sommersemester 2021 insgesamt 160 Studierende aus dem Studiengang Betriebswirtschaftslehre und insgesamt 50 Studierende aus dem Studiengang VWL an der (einheitlichen) Klausur „Statistik“ teil. Um vorab statistisch zu prüfen, ob es wesentliche Unterschiede im Niveau der von den Klausurteilnehmern erreichten Punktezahlen gibt, wurden zunächst die Klausuren von jeweils sechs zufällig ausgewählten Teilnehmenden der beiden Studiengänge korrigiert. Die Tabelle beinhaltet die erreichten studiengangspezifischen Punktezahlen:

BWL	42	65	53	40	67	33
VWL	41	71	69	80	47	91

Erfahrungsgemäß können erreichte Punktezahlen in einer Statistik-Klausur nicht als Realisationen einer normalverteilten Zufallsgröße angesehen werden.

- a) Prüfen Sie mit Hilfe eines geeigneten Tests auf einem Signifikanzniveau von 0,1 die folgende Ausgangshypothese: „In beiden Studiengängen existiert ein gleiches mittleres Niveau in der Anzahl der von den Teilnehmenden erreichten Punkte.“
- b) Bestimmen Sie den p-Wert der Aufgabe a). Wie würden Sie bei einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0,05$ entscheiden?
18. **P 37** In einem Fitnessstudio wird die Trainingsdauer von zwei Gruppen verglichen: Gruppe A trainiert mit Personal Trainer, Gruppe B ohne Trainer. Die Trainingsdauer (in Minuten) von jeweils zehn zufällig ausgewählten Personen ist:

Gruppe A	55	62	48	70	65	59	52	61	68	57
Gruppe B	40	65	44	52	67	61	54	46	42	49

Erfahrungsgemäß sind Trainingsdauern nicht normalverteilt.

Lässt sich mit einem Signifikanzniveau von 0,05 zeigen, dass die Personen in Gruppe A signifikant länger trainieren? Formulieren Sie geeignete Hypothesen und führen Sie einen passenden Test durch.

19. Es soll untersucht werden, ob die Konzentrationsleistung von Studierenden durch die Teilnahme an einem Yoga-Kurs besser wird. Dazu wird den Studierenden vor und nach einer Trainingsphase ein Konzentrationsleistungstest vorgegeben, bei dem sie folgende Punktzahlen erreichen:

Studierender	A	B	C	D	E	F	G	H	I
vorher:	23	23	21	22	21	29	22	31	27
nachher:	24	27	26	22	24	27	30	29	32

Prüfen Sie mit Hilfe eines geeigneten Tests auf einem Signifikanzniveau von 0,05, ob die Teilnahme an einem Yoga-Kurs eine Verbesserung der Konzentrationsleistung bewirkt.

20. **P 38** In sechs Abteilungen eines Unternehmens soll untersucht werden, ob eine Einführung flexibler Arbeitszeiten die Anzahl der monatlichen Überstunden reduziert hat.

Abteilung	1	2	3	4	5	6
Überstunden vorher	18	25	20	22	19	24
Überstunden nachher	19	19	21	15	19	18

Testen Sie ohne Annahme von Normalverteilung zum Signifikanzniveau $\alpha = 0,01$, ob die flexiblen Arbeitszeiten zu einer signifikanten Reduktion der Überstunden geführt haben.

Tests auf Zusammenhang

21. (Siehe Blatt 1, Beispiel 18) In einem Experiment zur Wirkung von Musik auf die Ausgabebereitschaft beim Einkauf in einem Supermarkt wurden 100 Kunden zufällig ausgewählt. Ein Teil der Kunden tätigte seine Einkäufe an Tagen, an denen im Supermarkt keine "Hintergrundmusik" eingespielt wurde. Der andere Teil an einem Tag, an dem der Einkauf durch Musik und Werbeansagen begleitet wurde. Jeder Kunde wurde hinsichtlich der Gesamtsumme der getätigten Einkäufe in eine der drei Gruppen der Ausgabebereitschaft (hoch, mittel und gering) eingeordnet. Es ergab sich folgende (bivariate) Verteilung:

	Ausgabebereitschaft		
Ambiente	gering	mittel	hoch
Mit Musik	8	16	21
Ohne Musik	24	20	11

Ist die Ausgabebereitschaft unabhängig vom Ambiente? Formulieren Sie die Hypothesen und führen Sie den entsprechenden Test zum Signifikanzniveau von 10 % durch.

22. **P 39** In einer Studie wird untersucht, ob ein Vorbereitungskurs den Erfolg in einer Statistik-Klausur beeinflusst. Von 50 Studierenden, die den Kurs besucht haben, bestehen 34 die Klausur. Von 60 Studierenden ohne Kurs bestehen 30.
- Stellen Sie die Daten in einer 2×2 -Kontingenztafel dar.
 - Testen Sie zum Signifikanzniveau $\alpha = 0,1$, ob das Bestehen der Klausur unabhängig vom Besuch des Kurses ist.

Anpassungstests

23. Die Eintrittskarten für ein Sommerkonzert wurden an den Kassen K1, K2, K3, K4 und K5 vertrieben. Vor Beginn des Verkaufs erhielt jede Kasse die gleiche Anzahl von Karten. In der Pause des Konzertes wird eine Umfrage unter 120 zufällig ausgewählten Besucherinnen und Besuchern durchgeführt. Dabei wird u.a. die Frage gestellt, an welcher Kasse die jeweilige Person ihre Eintrittskarte erworben hat. Die Auswertung zeigt folgendes Resultat:

Erwerb an Kassa	K1	K2	K3	K4	K5
Anzahl der Besucher	30	15	26	17	32

Testen Sie mit Hilfe eines geeigneten Verfahrens auf einem Signifikanzniveau von 0,05, ob dieses Ergebnis gegen die Annahme spricht, dass die Zahl der insgesamt verkauften Karten gleichmäßig auf die Kassen K1, K2, K3, K4 und K5 verteilt ist. Formulieren Sie die Hypothesen, geben Sie den Wert der Testgröße und die Testentscheidung an und interpretieren Sie Ihr Ergebnis sowohl statistisch als auch kontextbezogen.

24. **P 40** Bei einer Online-Umfrage zu vier Streaming-Plattformen (A, B, C und D) geben insgesamt 1.200 Personen an, welche Plattform sie bevorzugen. Die Plattformen gingen mit folgenden Marktanteilen (in %) aus einer früheren Studie hervor:

Plattform	A	B	C	D
Marktanteil (in %)	40	30	20	10

Die aktuelle Online-Umfrage ergab folgende Verteilung:

Plattform	A	B	C	D
Anzahl der Antworten	510	310	250	130

Lässt sich mit Hilfe eines geeigneten Chi-Quadrat-Anpassungstests zum Signifikanzniveau von 10 % die Vermutung bestätigen, dass sich die Präferenzen der Nutzerinnen und Nutzer im Vergleich zur früheren Studie verändert haben?

25. Ein Hersteller von TV-Geräten versucht durch eine technische Verbesserung, den Energieverbrauch von 65-Zoll LED-Geräten zu verringern. Zur Überprüfung wird eine Stichprobe von 10 Geräten mit alter Technik und 8 Geräten mit neuer Technik gezogen und der jeweilige Energieverbrauch gemessen (jeweils in kWh/Jahr). Es soll überprüft werden, ob die technische Verbesserung tatsächlich den Energieverbrauch verringert hat.

Ein Jarque-Bera-Test mit $\alpha = 0,05$ auf Normalverteilung ergab für die Daten der Stichprobe der Geräte mit alter Technik einen p-Wert von $p_{alt} = 0,280$, für die Geräte mit neuer Technik einen p-Value von $p_{neu} = 0,125$.

Weiters ergab ein F-Test einen Testwert von $t_0 = 4,501$ mit einem kritischen Bereich $K = [0; 0,24[\cup]4,82; \infty[$.

Welcher Test ist durchzuführen, wenn man überprüfen möchte, ob die technische Verbesserung tatsächlich den Energieverbrauch verringert hat? Formulieren Sie geeignete Hypothesen und begründen Sie! Der Test selbst muss nicht durchgeführt werden.

Die mit P gekennzeichneten Beispiele sind von den Studierenden vorzubereiten und nach Aufruf durch die Lehrveranstaltungsleitung zu präsentieren!