Statistik – Übungen SS 2026

Blatt 2: Wahrscheinlichkeitsrechnung

Wahrscheinlichkeitsrechnung Grundlagen

1. Die nach dem französischen Mathematiker Pierre-Simon de Laplace benannten Laplace-Experimente beruhen auf der Annahme, dass bei einem derartigen Zufallsexperiment nur endlich viele Ausgänge möglich sind, die alle mit gleicher Wahrscheinlichkeit auftreten. Spricht man im Falle eines Würfels von einem fairen, idealen oder Laplace-Würfel, so nimmt man an, dass bei einem Wurf die sechs Seitenflächen des Würfels – 1, 2, 3, 4, 5, 6 – jeweils mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$ auftreten. Es wird nun mit einem fairen Würfel gewürfelt. Man betrachtet die folgenden Ereignisse:

   E= „Zahl größer als vier" $\quad$ F = „ungerade Zahl"
   G = „Zahl kleiner als zwei" $\quad$ $H = \{2, 3, 4, 5\}$

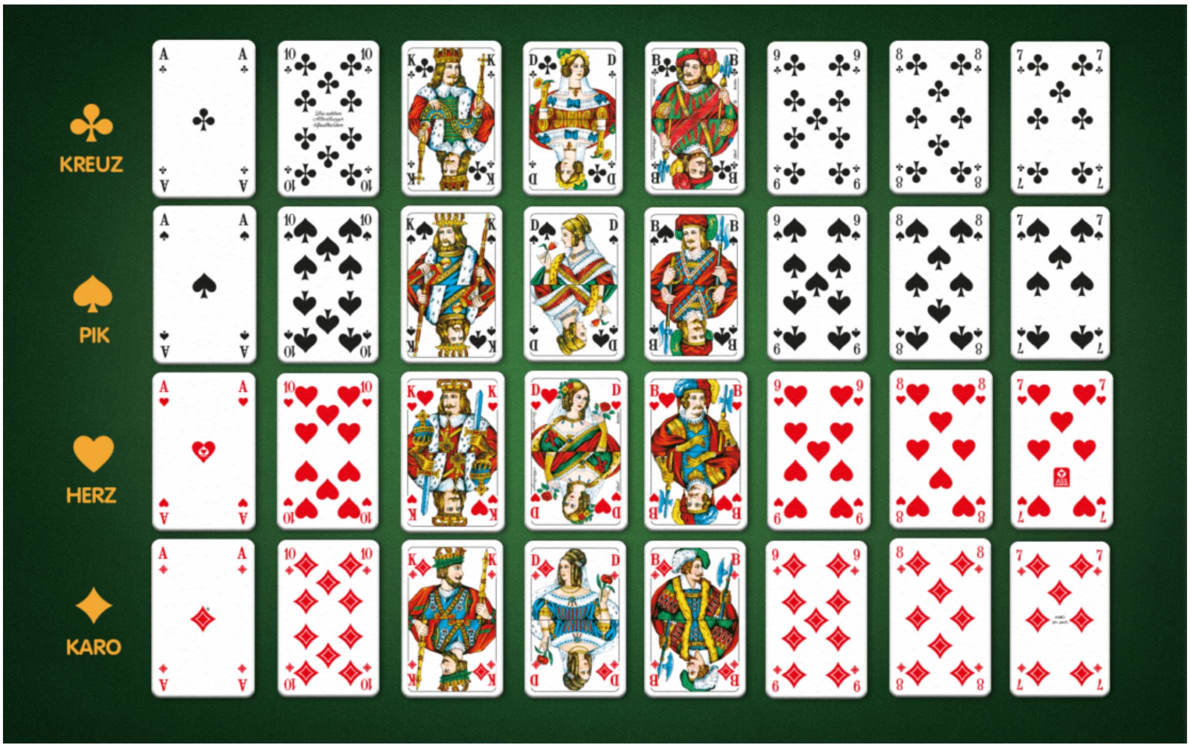
   a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für die Ereignisse E, F, G und H
   b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten $P(E \cup G)$, $P(F \cap H)$
   c) Zeigen Sie: die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(F \mid E)$ ist gleich $P(F)$. Sind E und F abhängig?

2. Für ein Zufallsexperiment stehen zwei Behälter A und B zur Verfügung. Im Behälter A sind vier rote und eine weiße Kugel, im Behälter B zwei rote und drei weiße Kugeln.

   Ein zweistufiges Experiment wird nun wie folgt durchgeführt: Zuerst wird ein fairer Würfel einmal geworfen. Ist die geworfene Augenzahl größer als vier, so wird eine Kugel aus Behälter A gezogen, andernfalls wird eine Kugel aus Behälter B gezogen.

   a) Stellen Sie dieses Experiment durch einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsbaum dar und geben Sie für alle möglichen Ergebnisse bzw. Abläufe deren Wahrscheinlichkeiten an!
   b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man eine rote Kugel?
   c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird eine Zahl größer als vier geworfen und man erhält eine rote Kugel?
   d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man, nachdem eine Zahl größer als vier geworfen worden ist, eine rote Kugel?
   e) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wurde eine Zahl größer als vier geworfen, wenn man weiß, dass die gezogene Kugel rot ist?

3. P 14 Beim Kartenspiel mit 32 Karten (Farben: Kreuz, Pik, Herz, Karo; Werte: 7, 8, 9, 10, Bube, Dame, König, Ass) werden an drei Personen je 10 Karten ausgeteilt, die verbliebenen zwei werden aufeinander gelegt und bleiben auf dem Tisch. Sie bilden den so genannten „Stapel“.



a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegen im Stapel zwei schwarze Buben?
b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind zwei Buben im Stapel?
c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die untere der beiden Karten ein Ass ist, unter der Bedingung, dass die obere Karte das Herz-Ass ist?

4. P 15 Betrachten Sie folgendes zweistufiges Zufallsexperiment:

Zunächst wird eine faire Münze einmal geworfen. Fällt „Kopf“, so wird in der zweiten Stufe eine der Zahlen 1 bis 9 gezogen. Fällt „Zahl“, zieht man in der zweiten Stufe eine der Zahlen 1 bis 5.

a) Stellen Sie das Zufallsexperiment mit Hilfe eines Baumdiagramms dar.
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass
   i. Kopf geworfen und eine gerade Zahl gezogen wird?
   ii. Zahl geworfen und eine ungerade gezogen wird?
   iii. eine gerade Zahl gezogen wird?
   iv. Zahl geworfen wurde, wenn bekannt ist, dass eine ungerade Zahl gezogen wurde?

5. Ein Artikel wird auf den drei Maschinen 1, 2 und 3 produziert. Die Maschinen haben einen jeweiligen Produktionsanteil von 60 %, 10 % bzw. 30 %. Die Ausschussquote der Maschine 1 beträgt 5 %, die der Maschine 2 beträgt 2 %. Insgesamt sind 4,4 % der für die Warenendkontrolle entnommenen Artikel Ausschuss.
   a) Wie groß ist die Ausschussquote der Maschine 3?
   b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Artikel auf der Maschine 1 hergestellt und in Ordnung ist?
   c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Artikel auf Maschine 2 produziert wurde, wenn man weiß, dass der Artikel Ausschuss ist?

6. P 16 In einem Fitnessstudio sind 500 Mitglieder angemeldet. Es wird erfasst, ob Mitglieder *weiblich oder männlich* sind und ob sie *regelmäßig am Morgen* oder *am Nachmittag/Abend* trainieren.

   Die folgenden absoluten Häufigkeiten wurden in einer Kreuztabelle teilweise erfasst:

	Trainiert am Morgen	Trainiert am Nachmittag/Abend	Summe
weiblich	100		300
männlich			
Summe	180		500

   a) Vervollständigen Sie die Tabelle so, dass sie den beschriebenen Sachverhalt korrekt wiedergibt.
   b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewähltes Mitglied
      i. weiblich ist?
      ii. weiblich ist oder am Morgen trainiert?
   c) Ein Mitglied wird zufällig ausgewählt.
      i. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es weiblich ist, wenn man weiß, dass es am Morgen trainiert?
      ii. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein weibliches Mitglied am Morgen trainiert?
   d) Untersuchen Sie, ob die Ereignisse

$$A = \{\text{Mitglied ist weiblich}\}, \qquad B = \{\text{Mitglied trainiert am Morgen}\}$$

   unabhängig sind. Begründen Sie Ihre Antwort rechnerisch.

7. P 17 An einer Universität wird die Teilnahme an einem freiwilligen Statistik-Tutorium analysiert. Die Studierenden werden in drei Gruppen eingeteilt:
   - Gruppe 1: Studierende im 1. Studienjahr,
   - Gruppe 2: Studierende im 2. Studienjahr,
   - Gruppe 3: Studierende im 3. Studienjahr oder höher.

   Die Gruppengrößen stehen im Verhältnis 5 : 7 : 4. Der Anteil der Teilnehmenden am Tutorium beträgt in Gruppe 1: 60 %, in Gruppe 2: 45 %, in Gruppe 3: 30 %.

   a) Wie groß ist der Gesamtanteil der Studierenden, die das Tutorium besuchen?

   b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit stammt ein zufällig ausgewählter Teilnehmender aus Gruppe 2?

   c) Wie groß ist der Anteil der Studierenden, die *nicht* teilnehmen und aus Gruppe 3 stammen?

Diskrete Zufallsgrößen

8. Ein Kapitalanleger verfügt über eine Anlagemöglichkeit. Die Wahrscheinlichkeitsfunktion für die Rendite X nach Steuern (in %) dieser Anlagemöglichkeit ist gegeben durch:

x_i (in %)	-5	0	3	6	9
p_i	0,1	0,1	0,4	0,3	0,1

   a) Bestimmen Sie Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung von X.

   b) Berechnen Sie den Erwartungswert, wenn Sie wissen, dass die Rendite X nach Steuern mindestens 3 % beträgt.

9. P 18 In einer aktuellen Losauflage „*Frühlings-Glück*“ gibt es insgesamt 10 Millionen Rubbellose. Der Preis pro Rubbellos beträgt zunächst 2 €. Die absoluten Häufigkeiten der Gewinnlose und die jeweiligen Auszahlungen sind in der folgenden Tabelle dargestellt:

Anzahl Gewinnlose	**Auszahlung pro Gewinnlos**
10	100.000 €
1.000	5.000 €
50.000	100 €
500.000	20 €
2.000.000	4 €

Alle übrigen Lose sind Nieten und bringen keine Auszahlung.

a) Wie groß ist der Gewinn der Lotterie, wenn alle Lose der Auflage verkauft werden und alle Gewinne abgeholt werden?

b) Berechnen Sie die Auszahlung, die man durchschnittlich pro gekauftem Los erwarten kann. Wie viel Euro verliert die Lotterie durchschnittlich pro gekauftem Los, wenn der Lospreis 2 € beträgt?

c) Wie groß müsste der Preis pro Rubbellos mindestens sein, damit der Gewinn der Lotterie bei Verkauf der gesamten Auflage mindestens 4 200 000 € beträgt?

Spezielle diskrete Verteilungen

10. Ein Eignungstest enthält unter anderem auch 3 Fragen zum aktuellen Tagesgeschehen. Zu jeder dieser Fragen sind vier Antworten zur Auswahl angegeben, von denen nur (genau) eine richtig ist. Ein Teilnehmer muss bei jeder Frage raten und kreuzt die Antwort zufällig an. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er

a) genau eine Frage richtig beantwortet

b) mindestens eine Frage richtig beantwortet

c) mehr Fragen richtig als falsch beantwortet?

d) Wie lauten Erwartungswert und Standardabweichung für die Anzahl richtiger Antworten?

11. P 19 Ein Pizzadienst erhält pro Abend Bestellungen von 10 Stammkunden. Jeder Stammkunde bestellt an einem beliebigen Abend unabhängig von den anderen mit Wahrscheinlichkeit $p = 0{,}3$.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält der Pizzadienst an einem Abend mehr als 3, aber höchstens 6 Bestellungen von diesen Stammkunden?

b) Wie viele Bestellungen dieser Stammkunden werden durchschnittlich pro Abend erwartet?

c) Der Pizzadienst kann zusätzlich zu Laufkundschaft maximal 5 dieser Stammkunden-Bestellungen pünktlich ausliefern, der Rest verspätet. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine Stammkunden-Bestellung verspätet ausgeliefert wird?

12. In einer Box befinden sich zwölf Lindor-Kugeln: vier der Sorte Edelbitter und acht mit weißer Schokolade. Herr E., der keine weiße Schokolade mag, darf nun drei Kugeln zufällig (ohne Zurücklegen) auswählen.
    a) Wie ist die Anzahl X gezogener Edelbitter-Kugeln verteilt?
    b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau zwei der drei gezogenen Kugeln von der Sorte Edelbitter sind?
    c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine der drei gezogenen Kugeln von der Sorte Edelbitter ist?
    d) Wie viele Edelbitter-Kugeln kann Herr E. erwarten?

13. P 20 Bei einer Lotterie werden 4 Gewinnzahlen aus den Zahlen $1, \ldots, 30$ ohne Zurücklegen gezogen. Eine Person tippt ebenfalls 4 verschiedene Zahlen.
    a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, genau 2 Zahlen richtig zu tippen?
    b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mindestens eine Zahl richtig zu tippen?
    c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, alle 4 Zahlen richtig zu tippen?

14. Die Häufigkeit von Kreditausfällen kann näherungsweise durch eine Poisson-Verteilung beschrieben werden. In einer Bankfiliale mit einem Portfolio von 1.000 Krediten fallen im Durchschnitt pro Jahr 10 Kredite aus. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass
    a) genau 5 Kredite
    b) mehr als 0,2 % der Kredite in einem Jahr ausfallen?

15. P 21 Ein Server erzeugt im Mittel 1,5 Fehlermeldungen pro Tag. Es wird angenommen, dass die Anzahl der Fehlermeldungen an einem Tag Poisson-verteilt ist.
    a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass an einem bestimmten Tag keine Fehlermeldung auftritt?
    b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass an einem bestimmten Tag mehr als 2 Fehlermeldungen auftreten?
    c) Wie viele Tage mit genau einer Fehlermeldung sind in einem 30-Tage-Monat zu erwarten?

16. In der Produktion von Elektronikbauteilen kommt es erfahrungsgemäß zu einem Ausschuss von 15 %. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Stichprobe von 10 Stück
    a) genau 2 defekte Bauteile sind
    b) sich höchstens ein defekter Bauteil befindet?
    c) Ein Großhändler nimmt eine Lieferung dieser Bauteile an, wenn in der Stichprobe von 10 Bauteilen höchstens ein defekter zu finden ist (siehe b)). Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass er mehr als 5 von 8 Lieferungen zurückschickt?

17. $\boxed{\text{P 22}}$ Ein E-Commerce-Unternehmen analysiert das Kaufverhalten von Website-Besuchern nach einer Werbekampagne. Erfahrungswerte zeigen, dass ein Besucher mit Wahrscheinlichkeit $p = 0,2$ einen Kauf tätigt. Die Kaufentscheidungen verschiedener Besucher gelten als unabhängig.

   a) An einem bestimmten Tag besuchen $n = 20$ Kunden die Website. X = Anzahl der Besucher, die einen Kauf tätigen. Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X.

   b) Nun betrachtet das Unternehmen zwei unabhängige Tage, an denen jeweils 20 Besucher die Website besuchen.

      X_1 = Anzahl der Käufer am ersten Tag,

      X_2 = Anzahl der Käufer am zweiten Tag.

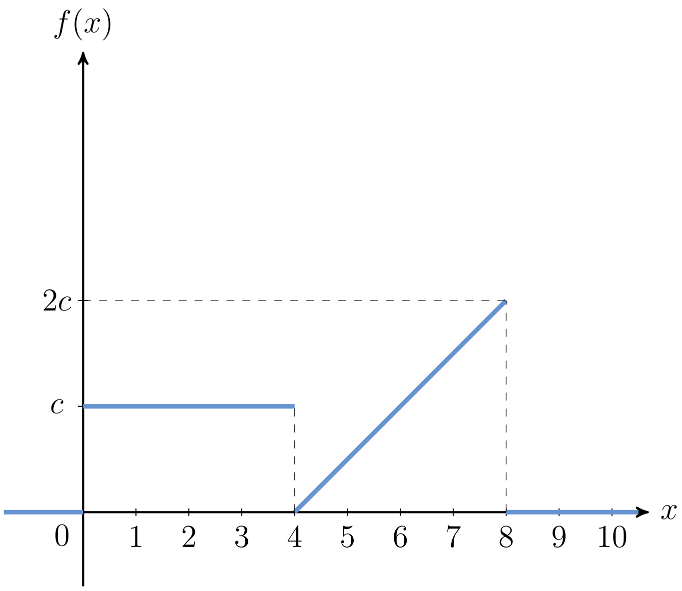
      Beide Zufallsvariablen sind identisch verteilt.

      i. Geben Sie die Verteilung der Zufallsvariablen $S = X_1 + X_2$ an.

      ii. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass an beiden Tagen zusammen mindestens 3 Käufe erfolgen.

Stetige Zufallsgrößen

18. Der folgende Graph stellt die Dichtefunktion einer stetigen Zufallsgröße dar.



Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeiten für die Intervalle: $]-\infty\,;4]$, $[3\,;5]$. und $[5\,;7]$. Hinweis: c ermitteln!

19. P 23 Eine Zufallsgröße X ist stetig gleichverteilt im Intervall $[0; M]$. Außerdem ist bekannt, dass $F(50) = 0,2$.

   a) Veranschaulichen Sie den Sachverhalt in einer Skizze.
   b) Bestimmen Sie das 70-%-Quantil.
   c) Bestimmen Sie $P(X \geq 40)$ und $P(X = 40)$.
   d) Wie groß ist die Standardabweichung? (Hinweis: M berechnen).

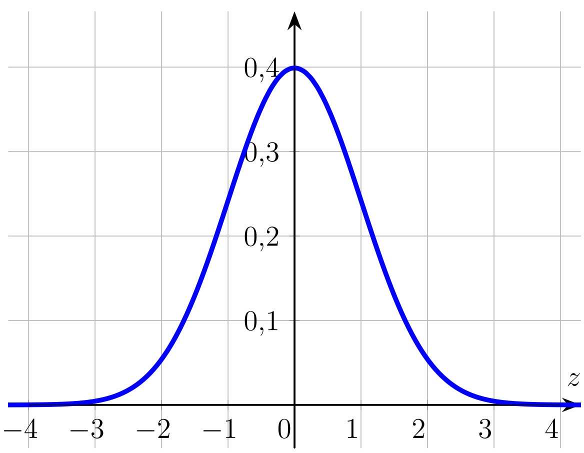
Spezielle stetige Verteilungen

20. P 24 Die Zeit (in Stunden) für den Download einer großen Datei über eine instabile Internetverbindung lässt sich als exponentialverteilte Zufallsgröße T mit der Varianz $0{,}04\,\mathrm{h}^2$ modellieren.

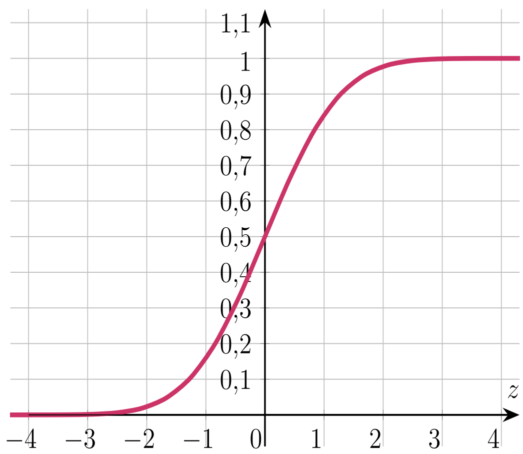
   a) Wie lange dauert der Download im Mittel?
   b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit dauert der Download länger als 15 Minuten?
   c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist der Download innerhalb von 5 Minuten abgeschlossen?

21. Nachstehend finden Sie Dichtefunktion und Verteilungsfunktion einer standardnormalverteilten Zufallsgröße.

Dichtefunktion



Verteilungsfunktion



Kennzeichnen Sie in diesen beiden Zeichnungen und bestimmen Sie:

   a) die Werte $\Phi(1,57)$, $\Phi(-1)$,
   b) $P(Z \in\,]-\infty; 1])$, $P(Z > 1,57)$,
   c) den Wert $z_{0,9}$ und $z_{0,2}$.

22. Eine Zufallsgröße unterliegt einer Normalverteilung N(5, 2)
    a) Bestimmen Sie dafür die Wahrscheinlichkeit des Intervalls $]4;7]$.
    b) Bestimmen Sie zu dieser Verteilung das $0,95$-Quantil und das $0,1$-Quantil.
    c) Bestimmen Sie die Zahl c derart, dass $P(X > c) = 0,2$
    d) Bestimmen Sie die Zahl d derart, dass $P(5 - d < X < 5 + d) = 0,1$

23. P 25 In einer Bäckerei werden Vollkornbrote gebacken. Das Gewicht X eines Brotes (in g) ist normalverteilt mit Erwartungswert 750 g und Standardabweichung 25 g.
    a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewähltes Brot zwischen 730 g und 780 g wiegt?
    b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Brot mehr als 800 g wiegt?
    c) Welches Gewicht wird von 95 % aller Brote nicht überschritten?

24. Ein Getränkehersteller füllt Orangensaft in 1000 ml-Flaschen ab. Die Füllmenge stimmt allerdings nicht immer exakt auf den Milliliter (ml) genau. Gehen Sie von der Annahme aus, dass die Füllmenge eine normalverteilte Zufallsgröße mit einem Erwartungswert von 1000 ml und einer Standardabweichung von 20 ml ist.
    a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einer zufällig ausgewählten Orangensaftflasche mehr als 980 ml, aber weniger als 1030 ml enthalten sind?
    b) Die Flaschen werden in einem Gebinde zu 6 Stück verpackt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein solches Gebinde weniger als 6060 ml enthält?

25. P 26 Ein Hersteller produziert Aluminiumstangen mit Solllänge 2,0 m. Die tatsächliche Länge X_1 der Stange ist normalverteilt mit Erwartungswert 2,0 m und Standardabweichung 0,01 m. An jede Stange werden vorne und hinten Endkappen montiert. Die Längen X_2 und X_3 dieser beiden Endkappen sind ebenfalls normalverteilt mit Erwartungswert 0,05 m und Standardabweichung 0,005 m. Alle drei Zufallsgrößen seien unabhängig.
    a) Wie ist die Gesamtlänge $Y = X_1 + X_2 + X_3$ verteilt (geben Sie Erwartungswert und Standardabweichung an)?
    b) Innerhalb welcher symmetrischen Grenzen um den Erwartungswert liegt die Gesamtlänge mit Wahrscheinlichkeit 0,9?

26. Die Leistung eines einzelnen Photovoltaik-Moduls kann für Module aus derselben Charge produktionsbedingten Schwankungen unterliegen. Die Leistung eines bestimmten Modultyps ist normalverteilt mit einem Erwartungswert von $\mu = 400$ Watt und einer Standardabweichung von $\sigma = 8$ Watt. Im Rahmen einer Qualitätskontrolle werden nun stündlich Module in Stichproben vom Umfang $n = 9$ entnommen und deren Leistung unter standardisierten Bedingungen ermittelt. Die folgende Tabelle zeigt die dabei gemessenen Werte (in Watt) im Verlauf eines Tages:

Uhrzeit	F 1	F 2	F 3	F 4	F 5	F 6	F 7	F 8	F 9
00:00	398,2	404,7	403,1	391,0	394,2	410,9	397,0	396,8	389,9
01:00	398,6	405,9	408,9	400,9	394,4	...			
⋮						⋮			
⋮						⋮			
23:00	385,5	405,9	399,7	394,9	405,1	409,5	403,5	414,3	395,9

Die Daten zu dieser Aufgabe finden Sie im Excel-File
STATISTIK_2025_WS__Blatt_2_Excel_Vorlage.xlsx Tabellenblatt 26_Solarmodule.

a) Werden zufällig (sehr viele) Stichproben vom Umfang n aus einem Datensatz gezogen, so gilt für die Verteilung des arithmetischen Mittels:

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \cdot (X_1 + X_2 + \ldots + X_n)$$

Erwartungswert: $E\left(\bar{X}\right) = \mu$

Varianz: $Var\left(\bar{X}\right) = \frac{\sigma^2}{n}$

Standardabweichung: $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Wie ist die Zufallsvariable $\bar{X}$ der Leistung pro Einheit für $n = 9$ verteilt? Geben Sie die Parameter dieser (theoretischen) Verteilung an.

b) Betrachten Sie nun die 24 Stichproben vom Umfang $n = 9$ aus einer Tagesproduktion und berechnen Sie für jede Stichprobe den zugehörigen Mittelwert. Wie groß sind Mittelwert und Stichprobenstandardabweichung der 24 Stichprobenmittelwerte? Vergleichen Sie diesen Wert mit dem Ergebnis aus a).

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, in einer Stichprobe vom Umfang $n = 9$ eine durchschnittliche Leistung von weniger als 396 Watt zu beobachten?

27. $\boxed{\text{P 27}}$ Ein standardisierter Sprachtest ist normalverteilt mit Erwartungswert $\mu = 500$ Punkten und Standardabweichung $\sigma = 80$ Punkten.

   a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person einen Wert zwischen 420 und 620 Punkten erzielt?

   b) Der Test wird in Kursgruppen zu 16 Personen unabhängig durchgeführt. Für jede Gruppe wird der Mittelwert $\bar{X}$ der Punkte bestimmt.

      i. Geben Sie die Parameter der Verteilung der Zufallsvariablen $\bar{X}$ an.

      ii. Wie wahrscheinlich ist es, einen Gruppenmittelwert größer als 518 Punkte zu beobachten?

Die mit $\boxed{\text{P}}$ gekennzeichneten Beispiele sind von den Studierenden vorzubereiten und nach Aufruf durch die Lehrveranstaltungsleitung zu präsentieren!