

Statistik – Übungen WS 2025

Blatt 2: Wahrscheinlichkeitsrechnung

Wahrscheinlichkeitsrechnung Grundlagen

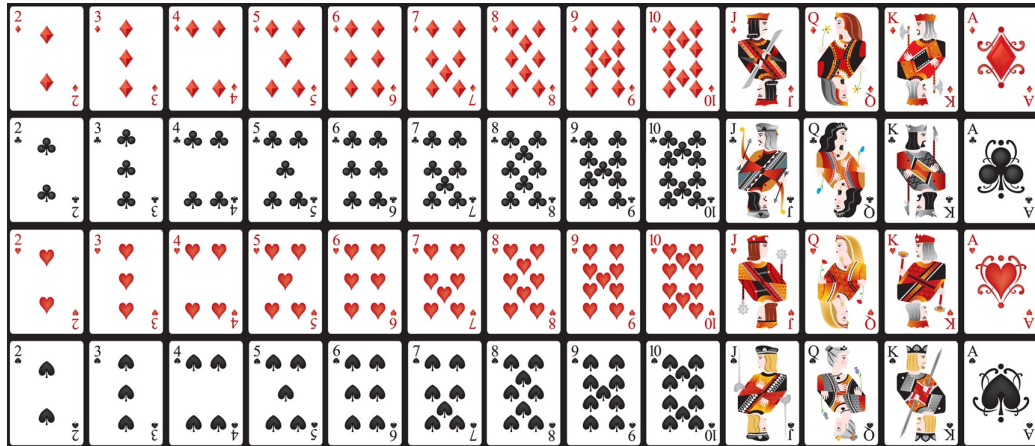
1. Die nach dem französischen Mathematiker Pierre-Simon de Laplace benannten Laplace-Experimente beruhen auf der Annahme, dass bei einem derartigen Zufallsexperiment nur endlich viele Ausgänge möglich sind, die alle mit gleicher Wahrscheinlichkeit auftreten. Spricht man im Falle eines Würfels von einem fairen, idealen oder Laplace-Würfel, so nimmt man an, dass bei einem Wurf die sechs Seitenflächen des Würfels – 1, 2, 3, 4, 5, 6 – jeweils mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$ auftreten. Es wird nun mit einem fairen Würfel gewürfelt. Man betrachtet die folgenden Ereignisse:

E = „Zahl größer als vier“ F = „ungerade Zahl“

G = „Zahl kleiner als zwei“ H = $\{2, 3, 4, 5\}$

- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für die Ereignisse E , F , G und H
 - Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten $P(E \cup G)$, $P(F \cap H)$
 - Zeigen Sie: die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(F | E)$ ist gleich $P(F)$. Sind E und F abhängig?
2. Für ein Zufallsexperiment stehen zwei Behälter A und B zur Verfügung. Im Behälter A sind vier rote und eine weiße Kugel, im Behälter B zwei rote und drei weiße Kugeln. Ein zweistufiges Experiment wird nun wie folgt durchgeführt: Zuerst wird ein fairer Würfel einmal geworfen. Ist die geworfene Augenzahl größer als vier, so wird eine Kugel aus Behälter A gezogen, andernfalls wird eine Kugel aus Behälter B gezogen.
- Stellen Sie dieses Experiment durch einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsbaum dar und geben Sie für alle möglichen Ergebnisse bzw. Abläufe deren Wahrscheinlichkeiten an!
 - Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man eine rote Kugel?
 - Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird eine Zahl größer als vier geworfen und man erhält eine rote Kugel?
 - Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man, nachdem eine Zahl größer als vier geworfen worden ist, eine rote Kugel?
 - Mit welcher Wahrscheinlichkeit wurde eine Zahl größer als vier geworfen, wenn man weiß, dass die gezogene Kugel rot ist?

3. **P 14** Aus einem standardisierten 52-Karten-Pokerdeck werden 5-Karten ohne Zurücklegen gezogen.



- a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die erste gezogene Karte
- eine Herzkarte ist.
 - eine Dame ist.
 - keine Zahlkarte (2–10) ist.
- b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit,
- dass die erste und zweite Karte jeweils Könige sind?
 - dass die zweite Karte ein König ist, wenn die erste Karte der Kreuz-König war?
- c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass alle 5 Karten Herzkarten sind.
4. **P 15** Betrachten Sie folgendes zweistufiges Zufallsexperiment:
- Zunächst wird eine faire Münze einmal geworfen. Fällt „Kopf“, so wird in der zweiten Stufe eine Kugel aus einer Urne gezogen, die 5 rote und 3 blaue Kugeln enthält. Fällt „Zahl“, zieht man in der zweiten Stufe eine Karte aus einem Kartenspiel mit 8 Karten, bestehend aus 2 Assen, 3 Königen und 3 Damen.
- a) Stellen Sie das Zufallsexperiment mit Hilfe eines Baumdiagramms dar.
- b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass
- Kopf geworfen und eine rote Kugel gezogen wird?
 - Zahl geworfen und ein König gezogen wird?
 - dass eine Dame gezogen wird?
 - Zahl geworfen wurde, wenn bekannt ist, dass eine Dame gezogen wurde?

5. Ein Artikel wird auf den drei Maschinen 1, 2 und 3 produziert. Die Maschinen haben einen jeweiligen Produktionsanteil von 60 %, 10 % bzw. 30 %. Die Ausschussquote der Maschine 1 beträgt 5 %, die der Maschine 2 beträgt 2 %. Insgesamt sind 4,4 % der für die Wareneingangskontrolle entnommenen Artikel Ausschuss.
- Wie groß ist die Ausschussquote der Maschine 3?
 - Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Artikel auf der Maschine 1 hergestellt und in Ordnung ist?
 - Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Artikel auf Maschine 2 produziert wurde, wenn man weiß, dass der Artikel Ausschuss ist?

6. **P 16** Im Rahmen einer sozialwissenschaftlichen Studie wird das Vertrauen in Medien in Zusammenhang mit dem Bildungsstand untersucht.

Die Ergebnisse einer groß angelegten, repräsentativen Umfrage unter Erwachsenen zeigen Folgendes:

- 80 % der Befragten geben an, den Medien zu misstrauen.
- 18 % der Befragten haben einen Hochschulabschluss.
- 5 % der Befragten haben einen Hochschulabschluss und misstrauen den Medien.

- a) Vervollständigen Sie die folgende Kreuztabelle so, dass sie den beschriebenen Sachverhalt wiedergibt:

	Hochschulabschluss	Kein Hochschulabschluss	Summe
Misstraut den Medien			
Vertraut den Medien			
Summe			

- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Person einen Hochschulabschluss hat und den Medien vertraut.
- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person den Medien misstraut, unter der Bedingung, dass sie einen Hochschulabschluss hat.
- Die Wahrscheinlichkeit eines bestimmten Ereignisses E lässt sich mit dem Bruch $P(E) = \frac{0,07}{0,2}$ berechnen. Beschreiben Sie diese Wahrscheinlichkeit im gegebenen Kontext in einem vollständigen Satz.

7. **P 17** Die Wahrscheinlichkeit, arbeitslos zu sein, hängt vom Bildungsniveau ab. Nach aktuellen Daten in Österreich liegt die Arbeitslosenquote bei:

- Personen mit Pflichtschulabschluss: 12 %
- Personen mit Matura: 7 %
- Personen mit Hochschulabschluss (Akademiker): 3 %

Der Anteil der Personen in der Bevölkerung verteilt sich wie folgt:

- Pflichtschulabschluss: 28 %
 - Matura: 52 %
 - Hochschulabschluss: 20 %
- a) Sie wählen zufällig eine Person aus der Gesamtbevölkerung aus. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese Person arbeitslos ist?
- b) Sie wählen zufällig eine Person aus und stellen fest, dass diese arbeitslos ist. Mit welcher Wahrscheinlichkeit handelt es sich um eine Person mit Matura?
- c) Eine arbeitslose Person wird zufällig ausgewählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie keinen Pflichtschulabschluss hat?

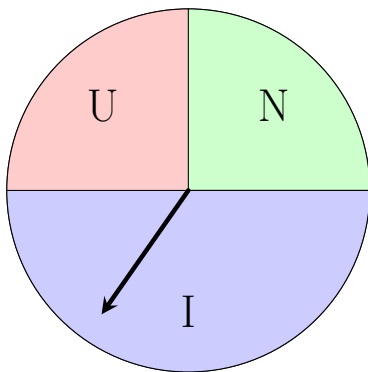
Diskrete Zufallsgrößen

8. Ein Kapitalanleger verfügt über eine Anlagemöglichkeit. Die Wahrscheinlichkeitsfunktion für die Rendite X nach Steuern (in %) dieser Anlagemöglichkeit ist gegeben durch:

x_i (in %)	-5	0	3	6	9
p_i	0,1	0,1	0,4	0,3	0,1

- a) Bestimmen Sie Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung von X .
- b) Berechnen Sie den Erwartungswert, wenn Sie wissen, dass die Rendite X nach Steuern mindestens 3 % beträgt.

9. **P 18** Im Rahmen einer Semestereröffnungsparty wird folgendes Glücksspiel angeboten: Man darf das nachstehende Glücksrad dreimal drehen. Es wird angenommen, dass der Zeiger des Glücksrades mit derselben Wahrscheinlichkeit an jeder beliebigen Stelle des Kreises stehen bleiben kann. Erzielt man dabei das Wort „UNI“ (in genau dieser Reihenfolge) so gewinnt man € 10.- Dreht man dreimal denselben Buchstaben hintereinander, so gewinnt man € 5.- In allen anderen Fällen gibt es keinen Gewinn. Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz des Gewinns pro Spiel.



Spezielle diskrete Verteilungen

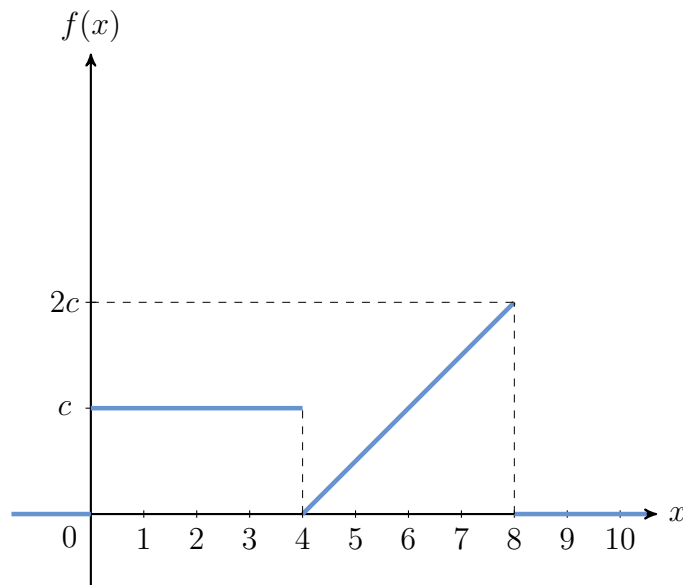
10. Ein Eignungstest enthält unter anderem auch 3 Fragen zum aktuellen Tagesgeschehen. Zu jeder dieser Fragen sind vier Antworten zur Auswahl angegeben, von denen nur (genau) eine richtig ist. Ein Teilnehmer muss bei jeder Frage raten und kreuzt die Antwort zufällig an. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er
- genau eine Frage richtig beantwortet
 - mindestens eine Frage richtig beantwortet
 - mehr Fragen richtig als falsch beantwortet?
 - Wie lauten Erwartungswert und Standardabweichung für die Anzahl richtiger Antworten?
11. **P 19** Das chinesische Spiel Pat Cha („Griff nach acht“) wird mit 8 Würfeln gespielt. Jede Spielerin/jeder Spieler setzt auf eine der 6 Augenzahlen. Eine Spielerin/ein Spieler gewinnt, wenn mindestens 3 der 8 Würfel die gesetzte Zahl zeigen. Die Lehrveranstaltungsleitung nennt Ihnen die Augenzahl auf die sie setzen sollen.
- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass diese Augenzahl gewinnt.
 - Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass bei den acht Würfeln mindestens einmal die genannte Augenzahl auftritt.
 - Wie verändert sich die Wahrscheinlichkeit in b), wenn mit 10 anstelle von 8 Würfeln gespielt wird?

12. In einer Box befinden sich zwölf Lindor-Kugeln: vier der Sorte Edelbitter und acht mit weißer Schokolade. Herr E., der keine weiße Schokolade mag, darf nun drei Kugeln zufällig (ohne Zurücklegen) auswählen.
- a) Wie ist die Anzahl X gezogener Edelbitter-Kugeln verteilt?
 - b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau zwei der drei gezogenen Kugeln von der Sorte Edelbitter sind?
 - c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine der drei gezogenen Kugeln von der Sorte Edelbitter ist?
 - d) Wie viele Edelbitter-Kugeln kann Herr E. erwarten?
13. P 20 In einer gemeinnützigen Organisation haben sich 10 Freiwillige für die Mitarbeit an einem sozialen Projekt beworben, von denen 6 bereits Erfahrungen in ähnlichen Projekten gesammelt haben. Per Losentscheid werden 4 Freiwillige aus den Bewerbern für das Projekt ausgewählt.
- a) Durch welches Modell (d. h., durch welche Verteilung mit welchen Parametern) lässt sich beschreiben, wie viele erfahrene Freiwillige unter den per Los ausgewählten 4 Personen sind und warum? Erläutern Sie die Bedeutung der einzelnen Parameter.
 - b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei der Auswahl von 4 Freiwilligen kein erfahrener Freiwilliger dabei ist?
 - c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein erfahrener Freiwilliger in der Auswahl ist?
14. Die Häufigkeit von Kreditausfällen kann näherungsweise durch eine Poisson-Verteilung beschrieben werden. In einer Bankfiliale mit einem Portfolio von 1.000 Krediten fallen im Durchschnitt pro Jahr 10 Kredite aus. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass
- a) genau 5 Kredite
 - b) mehr als 0,2 % der Kredite in einem Jahr ausfallen?
15. P 21 An einem Flughafen kommen im Durchschnitt 15 Taxis pro Stunde an, die Fahrgäste aufnehmen möchten. Die Ankünfte erfolgen zufällig und unabhängig voneinander. Es wird angenommen, dass sich die Anzahl der Taxis, die innerhalb einer Stunde eintreffen, durch eine Poisson-Verteilung modellieren lässt.
- a) Geben Sie den Parameter dieser Verteilung an.
 - b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit treffen genau 10 Taxis innerhalb einer Stunde am Flughafen ein?
 - c) Ein Fahrgast wartet 10 Minuten in der Taxizone. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in diesen 10 Minuten kein Taxi eintrifft?

16. In der Produktion von Elektronikbauteilen kommt es erfahrungsgemäß zu einem Ausschuss von 15 %. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Stichprobe von 10 Stück
- a) genau 2 defekte Bauteile sind
 - b) sich höchstens ein defekter Bauteil befindet?
 - c) Ein Großhändler nimmt eine Lieferung dieser Bauteile an, wenn in der Stichprobe von 10 Bauteilen höchstens ein defekter zu finden ist (siehe b)). Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass er mehr als 5 von 8 Lieferungen zurückschickt?
17. P 22 Ein Limonaden-Abfüllbetrieb verwendet Pfandflaschen. Von den zurückgenommenen Flaschen sind erfahrungsgemäß 0,3 % wegen zu starker Verschmutzung und 0,9 % wegen Glasschäden nicht mehr verwendbar. Diese beiden Fehlerarten treten unabhängig voneinander auf und schließen sich gegenseitig aus (eine Flasche hat entweder einen Glasschaden oder ist verschmutzt, oder ist verwendbar).
- a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine zufällig herausgegriffene Flasche wiederverwendbar?
 - b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind alle 12 Flaschen einer Kiste wiederverwendbar?
 - c) Auf eine Standard-Europalette passen 24 Kisten mit je 12 Flaschen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich auf einer Europalette mehr als 20 Kisten befinden, die ausschließlich wiederverwendbare Flaschen enthalten?

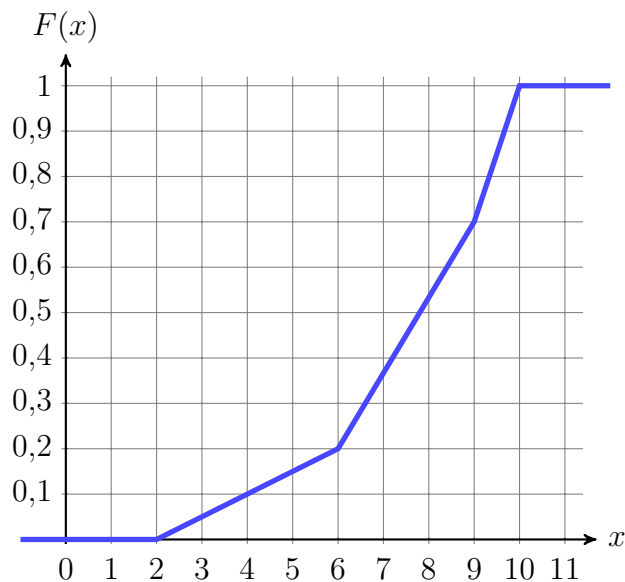
Stetige Zufallsgrößen

18. Der folgende Graph stellt die Dichtefunktion einer stetigen Zufallsgröße dar.



Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeiten für die Intervalle: $]-\infty; 4]$, $[3; 5]$. und $[5; 7]$.
Hinweis: c ermitteln!

19. P 23 Der folgende Graph stellt die Verteilungsfunktion einer stetigen Zufallsgröße X dar.



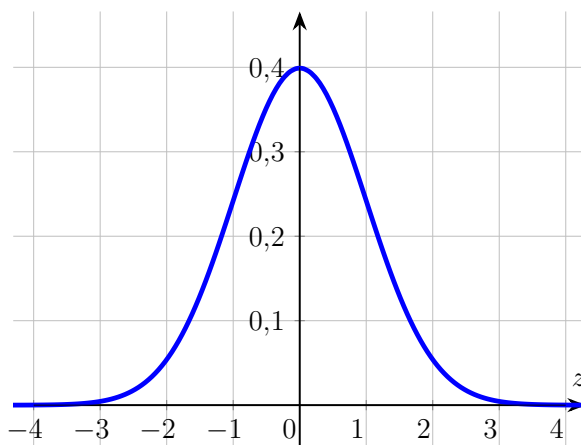
Berechnen Sie:

- $P(X \leq 4)$
- $P([6; 8])$
- Bestimmen Sie eine Zahl c so, dass $P(X \geq c) = 0,8$ gilt.

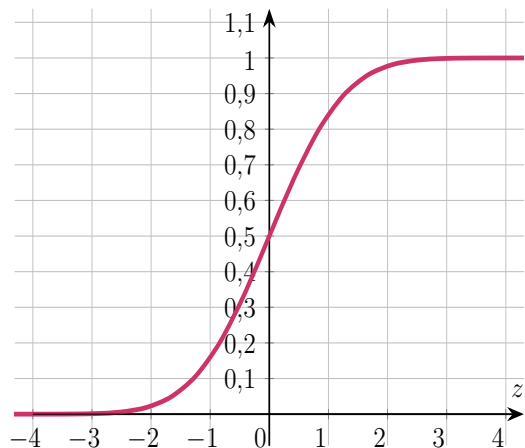
Spezielle stetige Verteilungen

20. **P 24** Die Lebensdauer X eines elektronischen Bauteils ist exponentialverteilt mit Parameter $\lambda = \frac{1}{500}$ (in Stunden).
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Bauteil mindestens 200 Stunden nicht ausfällt?
 - Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Bauteil zwischen den Zeitpunkten $t_1 = 200$ Stunden und $t_2 = 300$ Stunden ausfällt?
 - Welchen Wert müsste der Parameter λ besitzen, damit mit Wahrscheinlichkeit 0,9 die Lebensdauer des Bauteils mindestens 50 Stunden beträgt?
21. Nachstehend finden Sie Dichtefunktion und Verteilungsfunktion einer standardnormalverteilten Zufallsgröße.

Dichtefunktion



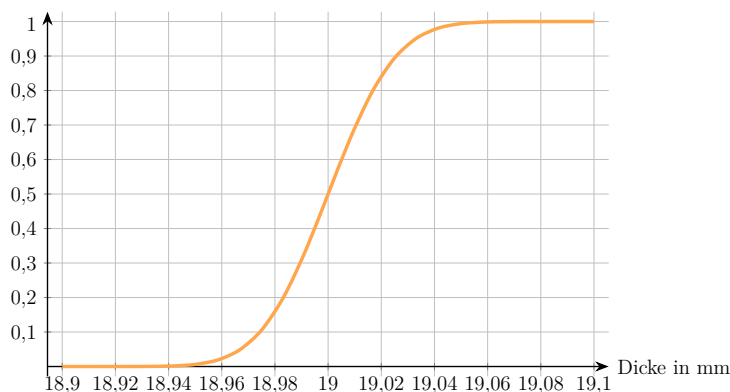
Verteilungsfunktion



Kennzeichnen Sie in diesen beiden Zeichnungen und bestimmen Sie:

- die Werte $\Phi(1,57)$, $\Phi(-1)$,
- $P(Z \in]-\infty; 1])$, $P(Z > 1,57)$,
- den Wert $z_{0,9}$ und $z_{0,2}$.

22. Eine Zufallsgröße unterliegt einer Normalverteilung $N(5, 2)$
- Bestimmen Sie dafür die Wahrscheinlichkeit des Intervalls $]4; 7]$.
 - Bestimmen Sie zu dieser Verteilung das 0,95-Quantil und das 0,1-Quantil.
 - Bestimmen Sie die Zahl c derart, dass $P(X > c) = 0,2$
 - Bestimmen Sie die Zahl d derart, dass $P(5 - d < X < 5 + d) = 0,1$
23. **P 25** Auf einer Maschine werden Platten hergestellt, deren Dicke X (bei korrekter Einstellung der Maschine) normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 19$ mm und der Soll-Standardabweichung $\sigma = 0,02$ mm ist. Platten mit einer Dicke zwischen $18,98 \leq X \leq 19,02$ mm sind Qualität A, alle anderen Qualität B.
- Wie viel Prozent der Produktion sind Qualität A?
 - In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der Verteilungsfunktion dieser Normalverteilung dargestellt. Kennzeichnen Sie in dieser Abbildung die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Platte von Qualität A ist.
 - Wie müssten die Toleranzgrenzen symmetrisch zu μ festgelegt werden, um nur 5 % Platten der Qualität B zu erhalten?



24. Ein Getränkehersteller füllt Orangensaft in 1000 ml-Flaschen ab. Die Füllmenge stimmt allerdings nicht immer exakt auf den Milliliter (ml) genau. Gehen Sie von der Annahme aus, dass die Füllmenge eine normalverteilte Zufallsgröße mit einem Erwartungswert von 1000 ml und einer Standardabweichung von 20 ml ist.
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einer zufällig ausgewählten Orangensaftflasche mehr als 980 ml, aber weniger als 1030 ml enthalten sind?
 - Die Flaschen werden in einem Gebinde zu 6 Stück verpackt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein solches Gebinde weniger als 6060 ml enthält?

25. **P 26** Ein Unternehmen betreibt eine Fabrik mit 120 Maschinen. Jede Maschine verursacht im Durchschnitt monatliche Betriebskosten (inklusive Wartung, Energieverbrauch etc.) von € 1.800 mit einer Standardabweichung von € 200.
- Wie groß sind der Erwartungswert und die Standardabweichung der monatlichen Betriebskosten aller Maschinen in dieser Fabrik?
 - Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die monatlichen Betriebskosten aller Maschinen in der Fabrik größer sind als € 219.000.
26. Die Leistung eines einzelnen Photovoltaik-Moduls kann für Module aus derselben Charge produktionsbedingten Schwankungen unterliegen. Die Leistung eines bestimmten Modultyps ist normalverteilt mit einem Erwartungswert von $\mu = 400$ Watt und einer Standardabweichung von $\sigma = 8$ Watt. Im Rahmen einer Qualitätskontrolle werden nun stündlich Module in Stichproben vom Umfang $n = 9$ entnommen und deren Leistung unter standardisierten Bedingungen ermittelt. Die folgende Tabelle zeigt die dabei gemessenen Werte (in Watt) im Verlauf eines Tages:

Uhrzeit	F 1	F 2	F 3	F 4	F 5	F 6	F 7	F 8	F 9
00:00	398,2	404,7	403,1	391,0	394,2	410,9	397,0	396,8	389,9
01:00	398,6	405,9	408,9	400,9	394,4	...			
⋮						⋮			
⋮						⋮			
23:00	385,5	405,9	399,7	394,9	405,1	409,5	403,5	414,3	395,9

Die Daten zu dieser Aufgabe finden Sie im Excel-File
 STATISTIK_2025_WS_Blatt_2_Excel_Vorlage.xlsx Tabellenblatt 26.Solarmodule.

- Werden zufällig (sehr viele) Stichproben vom Umfang n aus einem Datensatz gezogen, so gilt für die Verteilung des arithmetischen Mittels:

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \cdot (X_1 + X_2 + \dots + X_n)$$

$$\begin{aligned} \text{Erwartungswert:} \quad E(\bar{X}) &= \mu \\ \text{Varianz:} \quad \text{Var}(\bar{X}) &= \frac{\sigma^2}{n} \\ \text{Standardabweichung:} \quad \sigma_{\bar{X}} &= \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

Wie ist die Zufallsvariable $\bar{X}$ der Leistung pro Einheit für $n = 9$ verteilt? Geben Sie die Parameter dieser (theoretischen) Verteilung an.

- Betrachten Sie nun die 24 Stichproben vom Umfang $n = 9$ aus einer Tagesproduktion und berechnen Sie für jede Stichprobe den zugehörigen Mittelwert. Wie groß sind Mittelwert und Stichprobenstandardabweichung der 24 Stichprobenmittelwerte? Vergleichen Sie diesen Wert mit dem Ergebnis aus a).
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, in einer Stichprobe vom Umfang $n = 9$ eine durchschnittliche Leistung von weniger als 396 Watt zu beobachten?

27. P 27 Die Lieferzeit eines bestimmten Versandunternehmens für Pakete ist normalverteilt mit einem Durchschnitt von 4 Tagen und einer Standardabweichung von 0,6 Tagen. Es werden nun Stichproben von 25 Paketen gezogen, und der Mittelwert der Lieferzeiten dieser 25 Pakete wird bestimmt.
- a) Wie ist die Zufallsvariable $\bar{X}$ verteilt? Geben Sie die Parameter dieser Verteilung an.
 - b) Wie wahrscheinlich ist es, dass die durchschnittliche Lieferzeit der 25 Pakete in einer Stichprobe mehr als 4,1 Tage beträgt?
 - c) Wie groß müsste die Stichprobengröße sein, damit die Wahrscheinlichkeit, dass die durchschnittliche Lieferzeit der Pakete mehr als 4,1 Tage beträgt, auf 1% sinkt?

Die mit P gekennzeichneten Beispiele sind von den Studierenden vorzubereiten und nach Aufruf durch die Lehrveranstaltungsleitung zu präsentieren!