

# Statistik – Übungen WS 2024

## Blatt 2: Wahrscheinlichkeitsrechnung

### Wahrscheinlichkeitsrechnung Grundlagen

1. Die nach dem französischen Mathematiker Pierre-Simon de Laplace benannten Laplace-Experimente beruhen auf der Annahme, dass bei einem derartigen Zufallsexperiment nur endlich viele Ausgänge möglich sind, die alle mit gleicher Wahrscheinlichkeit auftreten. Spricht man im Falle eines Würfels von einem fairen, idealen oder Laplace-Würfel, so nimmt man an, dass bei einem Wurf die sechs Seitenflächen des Würfels – 1, 2, 3, 4, 5, 6 – jeweils mit der Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{6}$  auftreten. Es wird nun mit einem fairen Würfel gewürfelt. Man betrachtet die folgenden Ereignisse:

$E =$  „Zahl größer als vier“       $F =$  „ungerade Zahl“

$G =$  „Zahl kleiner als zwei“       $H = \{2, 3, 4, 5\}$

- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für die Ereignisse  $E$ ,  $F$ ,  $G$  und  $H$
  - Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten  $P(E \cup G)$ ,  $P(F \cap H)$
  - Zeigen Sie: die bedingte Wahrscheinlichkeit  $P(F | E)$  ist gleich  $P(F)$ . Sind  $E$  und  $F$  abhängig?
2. Für ein Zufallsexperiment stehen zwei Behälter A und B zur Verfügung. Im Behälter A sind vier rote und eine weiße Kugel, im Behälter B zwei rote und drei weiße Kugeln. Ein zweistufiges Experiment wird nun wie folgt durchgeführt: Zuerst wird ein fairer Würfel einmal geworfen. Ist die geworfene Augenzahl größer als vier, so wird eine Kugel aus Behälter A gezogen, andernfalls wird eine Kugel aus Behälter B gezogen.
- Stellen Sie dieses Experiment durch einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsbaum dar und geben Sie für alle möglichen Ergebnisse bzw. Abläufe deren Wahrscheinlichkeiten an!
  - Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man eine rote Kugel?
  - Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird eine Zahl größer als vier geworfen und man erhält eine rote Kugel?
  - Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man, nachdem eine Zahl größer als vier geworfen worden ist, eine rote Kugel?
  - Mit welcher Wahrscheinlichkeit wurde eine Zahl größer als vier geworfen, wenn man weiß, dass die gezogene Kugel rot ist?

3. **P 14** Beim (europäischen) Roulette gibt es 37 nummerierte Fächer mit den Zahlen 1 bis 36, sowie 0, in denen die Kugel landen kann. 18 Zahlen sind rot, 18 Zahlen sind schwarz während die 0 grün ist.



			0				
PASSE	1	2	3	MANQUE			
	4	5	6				
	7	8	9				
PAIR	10	11	12	IMPAIR			
	13	14	15				
	16	17	18				
	19	20	21				
◆	22	23	24	◆			
	25	26	27				
	28	29	30				
	31	32	33				
12 <sup>P</sup>	12 <sup>M</sup>	12 <sup>D</sup>			12 <sup>D</sup>	12 <sup>M</sup>	12 <sup>P</sup>

- a) Das Rad wird einmal gedreht. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Kugel
- in einem Fach mit einer Zahl landet, die rot und kleiner als 13 ist?
  - in einem Fach mit einer Zahl landet, die ungerade und nicht schwarz ist? (Hinweis: 0 ist eine gerade Zahl)
  - in einem beliebigen schwarzen Fach oder dem Fach mit der Zahl 0 landet?
- b) Angenommen ein Spieler setzt nur auf die Zahlen 1 bis 12. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit,
- dass die Kugel auf einer Zahl zwischen 1 und 12 landet?
  - dass diese Zahl rot ist, wenn sie auf einer Zahl zwischen 1 und 12 gelandet ist?

4. P 15 Ein zweistufiges Spiel wird wie folgt durchgeführt: Zuerst wird ein fairer Würfel einmal geworfen. Ist die geworfene Augenzahl gerade, zieht man in der zweiten Stufe eine Karte aus einem normalen Kartenspiel mit 52 Karten. Wenn eine ungerade Zahl gewürfelt wird, zieht man stattdessen eine Karte aus einem Stapel von 10 Karten, die aus zwei Buben, drei Damen, vier Königen und einem Ass besteht.

Stellen Sie die folgenden Experimente jeweils durch einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsbaum dar und geben Sie für alle möglichen Ergebnisse bzw. Abläufe deren Wahrscheinlichkeiten an!

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass

- a) eine gerade Zahl gewürfelt und eine Herz-Karte gezogen wird?
  - b) eine ungerade Zahl gewürfelt und danach ein König gezogen wird?
  - c) eine Dame gezogen wird?
  - d) mit dem Würfel eine ungerade Zahl geworfen wurde, wenn man weiß, dass eine Dame gezogen wurde?
5. Ein Artikel wird auf den drei Maschinen 1, 2 und 3 produziert. Die Maschinen haben einen jeweiligen Produktionsanteil von 60 %, 10 % bzw. 30 %. Die Ausschussquote der Maschine 1 beträgt 5 %, die der Maschine 2 beträgt 2 %. Insgesamt sind 4,4 % der für die Wareneingangskontrolle entnommenen Artikel Ausschuss.
- a) Wie groß ist die Ausschussquote der Maschine 3?
  - b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Artikel auf der Maschine 1 hergestellt und in Ordnung ist?
  - c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Artikel auf Maschine 2 produziert wurde, wenn man weiß, dass der Artikel Ausschuss ist?

6. **P 16** Bei einer Statistik-Prüfung an der KF-Uni ergaben sich für die Studierenden von drei Studienrichtungen, die an dieser Prüfung teilgenommen haben, die folgenden Ergebnisse:

	bestanden	nicht bestanden	Summe
BWL	20	9	29
Soziologie	19	7	26
VWL	9	6	15
Summe	48	22	70

Eine Klausurarbeit dieser Studierenden wird zufällig ausgewählt.

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Klausurarbeit positiv ist?
  - Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Klausurarbeit nicht von einer VWL-Studierenden?
  - Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat eine Studierende bestanden, wenn man weiß, dass sie Soziologie studiert?
7. **P 17** An einer Universität können sich die Studierenden – im Rahmen der Möglichkeiten – eine Übungsgruppe aussuchen. 35% der Studierenden wählen Gruppe A, 25% gehen in die Gruppe B, 40% zu Gruppe C. In Gruppe A und B fallen im Mittel  $\frac{2}{5}$  der Teilnehmenden durch, in Gruppe C nur  $\frac{1}{5}$ .
- Wie viel Prozent aller Teilnehmenden fallen im Mittel durch?
  - Eine Studierende hat die Prüfung bestanden. Mit welcher Wahrscheinlichkeit war sie in Gruppe A?

## Diskrete Zufallsgrößen

8. Ein Kapitalanleger verfügt über eine Anlagemöglichkeit. Die Wahrscheinlichkeitsfunktion für die Rendite  $X$  nach Steuern (in %) dieser Anlagemöglichkeit ist gegeben durch:

$x_i$ (in %)	-5	0	3	6	9
$p_i$	0,1	0,1	0,4	0,3	0,1

- Bestimmen Sie Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung von  $X$ .
- Berechnen Sie den Erwartungswert, wenn Sie wissen, dass die Rendite  $X$  nach Steuern mindestens 3 % beträgt.

9. **P 18** Ein Casino bietet folgendes Spiel an: Sie dürfen mit einem weißen und einem roten Würfel würfeln. Wenn beide die gleiche Augenzahl zeigen, bekommen Sie 10 Geldeinheiten ausbezahlt, wenn der rote Würfel mehr Augen zeigt als der weiße, bekommen Sie die Augenzahl des roten Würfels ausbezahlt, in allen anderen Fällen gehen Sie leer aus.
- Wie hoch müsste der Einsatz bei diesem Spiel sein, damit das Spiel fair ist, d.h. der Einsatz mit dem Erwartungswert der Auszahlung übereinstimmt.
  - Wie hoch ist die Varianz der Auszahlung?

Hinweis: Die folgende Tabelle zeigt alle 36 möglichen Ergebnisse des Experimentes:

$R \setminus W$	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

### Spezielle diskrete Verteilungen

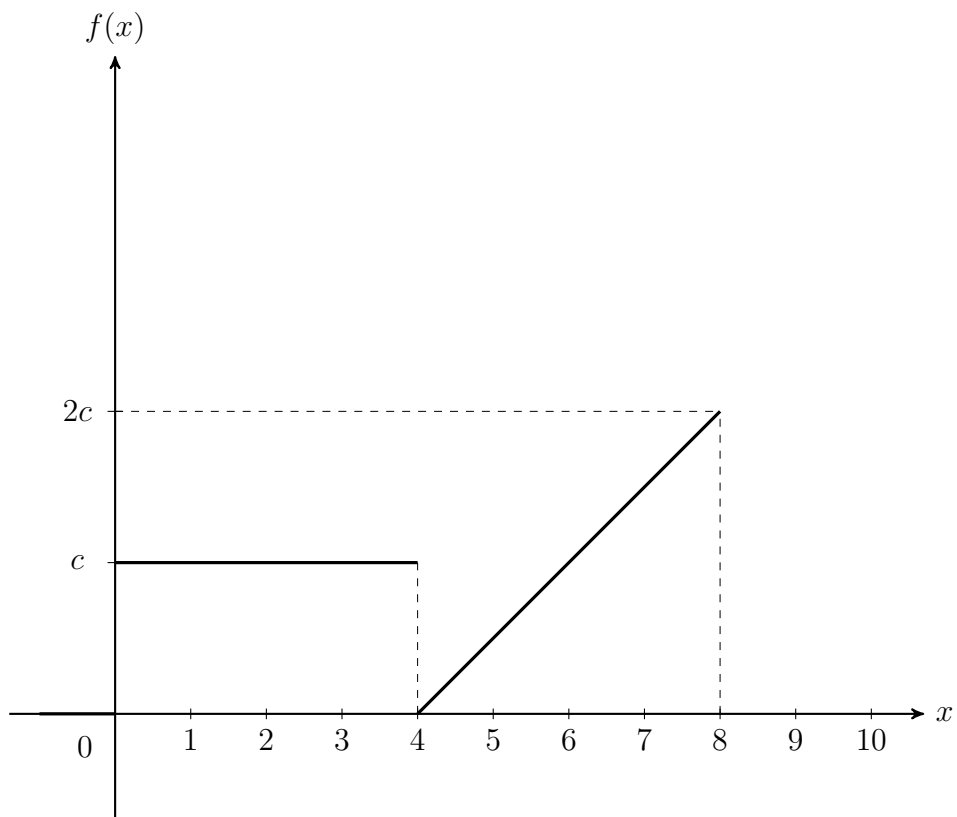
10. Ein Eignungstest enthält unter anderem auch 3 Fragen zum aktuellen Tagesgeschehen. Zu jeder dieser Fragen sind vier Antworten zur Auswahl angegeben, von denen nur (genau) eine richtig ist. Ein Teilnehmer muss bei jeder Frage raten und kreuzt die Antwort zufällig an. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er
- genau eine Frage richtig beantwortet
  - mindestens eine Frage richtig beantwortet
  - mehr Fragen richtig als falsch beantwortet?
  - Wie lauten Erwartungswert und Standardabweichung für die Anzahl richtiger Antworten?
11. **P 19** Aus früheren Studien ist bekannt, dass 45 % der Studierenden einer Universität bereit sind, an einer Online-Petition für mehr soziale Gerechtigkeit teilzunehmen. Im Rahmen einer neuen Umfrage werden 20 Studierende der Universität zufällig ausgewählt und befragt, ob Sie an einer solchen Petition teilnehmen würden oder nicht.
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass
- genau 7 Personen
  - weniger als 2 Personen
  - mindestens 9 aber nicht mehr als 11 Personen angeben, an einer solchen Petition teilnehmen zu wollen?
  - Es ist geplant, eine Folgeaktion zu starten, falls die Umfrage zeigt, dass mindestens 90 % der befragten Personen eine solche Petition unterstützen würden. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit für eine Folgeaktion?

12. In einer Box befinden sich zwölf Lindor-Kugeln: vier der Sorte Edelbitter und acht mit weißer Schokolade. Herr E., der keine weiße Schokolade mag, darf nun drei Kugeln zufällig (ohne Zurücklegen) auswählen.
- Wie ist die Anzahl  $X$  gezogener Edelbitter-Kugeln verteilt?
  - Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau zwei der drei gezogenen Kugeln von der Sorte Edelbitter sind?
  - Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine der drei gezogenen Kugeln von der Sorte Edelbitter ist?
  - Wie viele Edelbitter-Kugeln kann Herr E. erwarten?
13. **P 20** In einer Personengruppe von 40 Personen befinden sich 10 selbstständig Erwerbstätige. 8 Personen werden zufällig ausgewählt und nach ihrem Beschäftigungsverhältnis befragt.  $X$  ist die Anzahl der Selbstständigen unter den Befragten.
- Bestimmen Sie Erwartungswert und Varianz von  $X$ .
  - Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass weniger als zwei der 8 Befragten selbstständig sind?
  - Berechnen Sie  $P(3 \leq X < 6)$ .
14. Die Häufigkeit von Kreditausfällen kann näherungsweise durch eine Poisson-Verteilung beschrieben werden. In einer Bankfiliale mit einem Portfolio von 1.000 Krediten fallen im Durchschnitt pro Jahr 10 Kredite aus. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass
- genau 5 Kredite
  - mehr als 0,2 % der Kredite in einem Jahr ausfallen?
15. **P 21** An einer Tankstelle in einem Einkaufszentrum kommen zwischen 10:00 und 12:00 Uhr durchschnittlich 4 Fahrzeuge pro Minute an. Man geht davon aus, dass die Anzahl  $X$  der in einer Minute ankommenden Fahrzeuge poissonverteilt ist mit  $\lambda = 4$ . Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass zwischen 10:00 und 12:00 Uhr in einer Minute
- kein Fahrzeug ankommt?
  - genau ein Fahrzeug ankommt?
  - mindestens vier Fahrzeuge ankommen?
  - Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Stunde mehr als 220 Fahrzeuge ankommen? Verwenden Sie für Ihre Berechnung Excel!

16. In der Produktion von Elektronikbauteilen kommt es erfahrungsgemäß zu einem Ausschuss von 15 %. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Stichprobe von 10 Stück
- a) genau 2 defekte Bauteile sind
  - b) sich höchstens ein defekter Bauteil befindet?
  - c) Ein Großhändler nimmt eine Lieferung dieser Bauteile an, wenn in der Stichprobe von 10 Bauteilen höchstens ein defekter zu finden ist (siehe b)). Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass er mehr als 5 von 8 Lieferungen zurückschickt?
17. P 22 Für eine bestimmte Lehrveranstaltung, die in fünf Parallelgruppen abgehalten wird, ist bekannt, dass nur 90 % der zu einer Lehrveranstaltung angemeldeten Studierenden diese auch wirklich besuchen. Daher werden pro Gruppe 63 Studierende aufgenommen, obwohl nur 60 im Hörsaal Platz haben.
- a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei 58 Anmeldungen tatsächlich alle Studierenden die Lehrveranstaltung auch wirklich besuchen?
  - b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit besuchen bei 63 Anmeldungen mehr Studierende die Lehrveranstaltung als Sitzplätze zur Verfügung stehen?
  - c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Überbuchung bei mindestens vier der fünf Parallelgruppen gut geht, wenn man annimmt, dass das Verhalten der Studierenden bei allen fünf Parallelgruppen gleich und stochastisch unabhängig ist?

## Stetige Zufallsgrößen

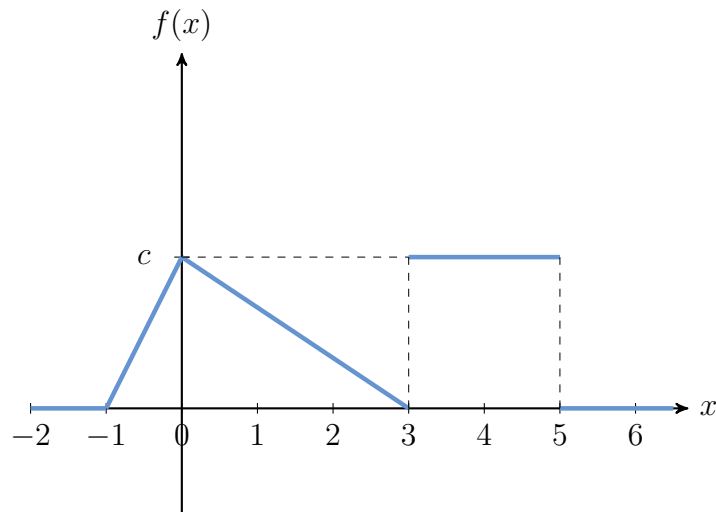
18. Der folgende Graph stellt die Dichtefunktion einer stetigen Zufallsgröße dar.



Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeiten für die Intervalle:  $]-\infty; 4]$ ,  $[3; 5]$ . und  $[5; 7]$ .  
Hinweis:  $c$  ermitteln!



19. **P 23** Der folgende Graph stellt die Dichtefunktion einer stetigen Zufallsgröße  $X$  dar.



Bestimmen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

- $P(]-\infty; 1])$
- $P([1, 5; 4])$
- $P(X > 1)$

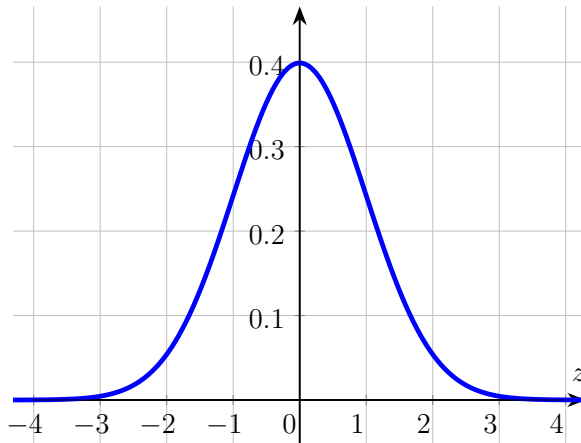
Hinweis:  $c$  ermitteln!

### Spezielle stetige Verteilungen

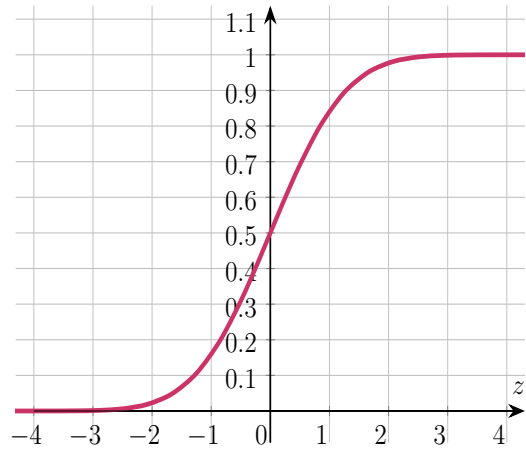
20. **P 24** In einem Kundenservice-Center werden die Zeiten zwischen aufeinanderfolgenden Kundenanrufen durch eine exponentialverteilte Zufallsvariable  $X$  modelliert. Die durchschnittliche Zeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Anrufen beträgt 10 Minuten.
- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der nächste Anruf innerhalb der nächsten 5 Minuten eingeht.
  - Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass kein Anruf für mindestens 15 Minuten eingeht?
  - Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der nächste Anruf zwischen 10 und 20 Minuten nach dem letzten Anruf erfolgt.
  - Geben Sie die Standardabweichung für die Zeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Anrufen an.
  - Ein Mitarbeiter des Call-Centers geht in eine 30-minütige Mittagspause. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass er während seiner Pause keinen Anruf verpasst?

21. Nachstehend finden Sie Dichtefunktion und Verteilungsfunktion einer standardnormalverteilten Zufallsgröße.

Dichtefunktion



Verteilungsfunktion



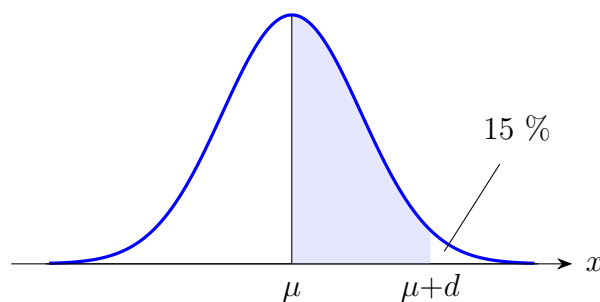
Kennzeichnen Sie in diesen beiden Zeichnungen und bestimmen Sie:

- die Werte  $\Phi(1,57)$ ,  $\Phi(-1)$ ,
- $P(Z \in ]-\infty; 1])$ ,  $P(Z > 1,57)$ ,
- den Wert  $z_{0,9}$  und  $z_{0,2}$ .

22. Eine Zufallsgröße unterliegt einer Normalverteilung  $N(5, 2)$

- Bestimmen Sie dafür die Wahrscheinlichkeit des Intervalls  $]4; 7]$ .
- Bestimmen Sie zu dieser Verteilung das 0,95-Quantil und das 0,1-Quantil.
- Bestimmen Sie die Zahl  $c$  derart, dass  $P(X > c) = 0,2$
- Bestimmen Sie die Zahl  $d$  derart, dass  $P(5 - d < X < 5 + d) = 0,1$

23. **P 25** Ein Unternehmen hat ein neues Produkt entwickelt und will dessen potenziellen Absatzmarkt einschätzen. Basierend auf Marktanalysen und vergleichbaren Produkten wird angenommen, dass die monatlichen Verkaufszahlen des Produkts normalverteilt sind, mit einem Erwartungswert von 10.000 Einheiten und einer Standardabweichung von 2.000 Einheiten.
- Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einem Monat weniger als 9.000 Einheiten verkauft werden?
  - Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt die Anzahl an monatlichen Verkäufen mehr als eine Standardabweichung über dem Erwartungswert?
  - Wie wahrscheinlich ist es, dass mehr als 7.000 und weniger als 11.000 Einheiten in einem Monat abgesetzt werden?
  - Der Graph der zugehörigen Dichtefunktion ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt:



Berechnen Sie  $d$ .

24. Ein Getränkehersteller füllt Orangensaft in 1000 ml-Flaschen ab. Die Füllmenge stimmt allerdings nicht immer exakt auf den Milliliter (ml) genau. Gehen Sie von der Annahme aus, dass die Füllmenge eine normalverteilte Zufallsgröße mit einem Erwartungswert von 1000 ml und einer Standardabweichung von 20 ml ist.
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einer zufällig ausgewählten Orangensaftflasche mehr als 980 ml, aber weniger als 1030 ml enthalten sind?
  - Die Flaschen werden in einem Gebinde zu 6 Stück verpackt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein solches Gebinde weniger als 6060 ml enthält?

25. **P 26** Aus einer Gruppe von Ehepaaren, bei denen beide Partner berufstätig sind, wird ein Paar zufällig ausgewählt. Es ist bekannt, dass das Einkommen einer Frau  $X$  näherungsweise normalverteilt ist mit einem Erwartungswert von  $E(X) = 2.000$  Euro und einer Standardabweichung von 1.000 Euro, während das Einkommen der Männer ( $Y$ ) näherungsweise normalverteilt ist mit einem Erwartungswert von  $E(Y) = 2.400$  Euro und einer Standardabweichung von 1.200 Euro. Die Zufallsgrößen  $X$  und  $Y$  können als unabhängig voneinander angesehen werden.
- Wie ist die Summe der Einkommen beider Partner verteilt?
  - Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das zufällig ausgewählte Paar ein Gesamteinkommen von mehr als 4.600 Euro erhält?
  - Welches Gesamteinkommen wird mit einer Wahrscheinlichkeit von 10 % unterschritten?
26. Die Leistung eines einzelnen Photovoltaik-Moduls kann für Module aus derselben Charge produktionsbedingten Schwankungen unterliegen. Die Leistung eines bestimmten Modultyps ist normalverteilt mit einem Erwartungswert von  $\mu = 400$  Watt und einer Standardabweichung von  $\sigma = 8$  Watt. Im Rahmen einer Qualitätskontrolle werden nun stündlich Module in Stichproben vom Umfang  $n = 9$  entnommen und deren Leistung unter standardisierten Bedingungen ermittelt. Die folgende Tabelle zeigt die dabei gemessenen Werte (in Watt) im Verlauf eines Tages:

Uhrzeit	F 1	F 2	F 3	F 4	F 5	F 6	F 7	F 8	F 9
00:00	398,2	404,7	403,1	391,0	394,2	410,9	397,0	396,8	389,9
01:00	398,6	405,9	408,9	400,9	394,4	...			
⋮						⋮			
⋮						⋮			
23:00	385,5	405,9	399,7	394,9	405,1	409,5	403,5	414,3	395,9

Die Daten zu dieser Aufgabe finden Sie im Excel-File  
 STATISTIK\_2024\_WS\_Blatt\_2\_Excel\_Vorlage.xlsx Tabellenblatt 26\_Solarmodule.

- a) Werden zufällig (sehr viele) Stichproben vom Umfang  $n$  aus einem Datensatz gezogen, so gilt für die Verteilung des arithmetischen Mittels:

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \cdot (X_1 + X_2 + \dots + X_n)$$

Erwartungswert:  $E(\bar{X}) = \mu$

Varianz:  $Var(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$

Standardabweichung:  $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Wie ist die Zufallsvariable  $\bar{X}$  der Leistung pro Einheit für  $n = 9$  verteilt? Geben Sie die Parameter dieser (theoretischen) Verteilung an.

- b) Betrachten Sie nun die 24 Stichproben vom Umfang  $n = 9$  aus einer Tagesproduktion und berechnen Sie für jede Stichprobe den zugehörigen Mittelwert. Wie groß sind Mittelwert und Stichprobenstandardabweichung der 24 Stichprobenmittelwerte? Vergleichen Sie diesen Wert mit dem Ergebnis aus a).
- c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, in einer Stichprobe vom Umfang  $n = 9$  eine durchschnittliche Leistung von weniger als 396 Watt zu beobachten?

27. P 27 Die jährliche Rendite eines Aktienfonds ist näherungsweise normalverteilt mit Erwartungswert  $\mu = 8 \%$  und einer Standardabweichung von  $\sigma = 1,5 \%$ .

Es werden nun Stichproben von 15 Investitionsjahren gezogen und der Mittelwert  $\bar{X}$  der 15 jährlichen Renditen bestimmt.

- a) Geben Sie die Parameter der Verteilung der Zufallsvariablen  $\bar{X}$  an.
- b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die durchschnittliche Rendite dieser Stichprobe zwischen 7,8 % und 8,2 % liegt?

Die mit P gekennzeichneten Beispiele sind von den Studierenden vorzubereiten und nach Aufruf durch die Lehrveranstaltungsleitung zu präsentieren!