

Masterkurs Wirtschaftsmathematik und Statistik

Dauer der Prüfung: 90 Minuten

12. Mai 2025

ZUNAME:			
VORNAME:		MATR.NR.:	

ERLAUBT: Formelsammlung des Instituts, nicht-programmierbare Taschenrechner

VERBOTEN: alle sonstigen Unterlagen, programmierbare Taschenrechner, Handys, etc.

Für eine positive Beurteilung müssen aus den Beispielen 1,2,3 sowie 4,5 jeweils mindestens 10 Punkte erreicht werden!

Aufgabe	1	2	3	4	5	Summe
max. Punkte	3	10	9	13	9	44
erreichte Punkte						

1. Gegeben sind zwei lineare Funktionen mit jeweils drei Variablen und zwar:

$$z_1 = -1 + 2x_1 - 3x_2 + 1.5x_3 \text{ und } z_2 = 1.5 - x_1 - 2x_2 + 3x_4.$$

Beide Funktionen werden als Basis für eine logistische Regression betrachtet, es liegen also zwei unterschiedliche Modelle vor. Weiters ist eine Stichprobe mit den folgenden 5 Datensätzen gegeben:

i	x_1	x_2	x_3	x_4	y
1	1	0.5	1	0.5	1
2	1.5	1	-2	-1.5	0
3	-3	2	3	0	0
4	-1	1	0	-0.5	0
5	2	1.5	2.5	2	1

- a) (4 Punkte) Bestimmen Sie die hit-ratio und die Devianz für beide Modelle. [z_1 : $h = 1$, $Dev = 0.869$, z_2 : $h = 0.8$, $Dev = 3.364$]
- b) (3 Punkte) Testen Sie mit Hilfe der Devianz die Güte des Modells für z_2 ($\alpha = 0.1$).
Was ist die Aussage Ihres Tests? Was können Sie (näherungsweise) über das Signifikanzniveau dieser Aussage sagen? [$K = [2.706, \infty)$, $\alpha^* \approx 0.07$]
- c) (3 Punkte) Es liegt die Vermutung nahe, dass z_1 ein besseres Modell liefert als z_2 . Führen Sie einen geeigneten statistischen Test für diese Behauptung durch ($\alpha = 0.05$).
Hinweis: Gehen Sie analog zum Test auf Einfluss einer Variablen vor. [$t = 2.495$, $K = [3.841, \infty)$]

Quantile der χ^2 -Verteilungen:

f	$\gamma=0,005$	0,01	0,025	0,05	0,1	0,9	0,95	0,975	0,99	0,995	0,999
1	0,0	0,0002	0,001	0,004	0,016	2,706	3,841	5,024	6,635	7,879	10,828
2	0,010	0,020	0,051	0,103	0,211	4,605	5,991	7,378	9,210	10,597	13,816
3	0,072	0,115	0,216	0,352	0,584	6,251	7,815	9,348	11,345	12,838	16,266
4	0,207	0,297	0,484	0,711	1,064	7,779	9,488	11,143	13,277	14,860	18,467

2. a) (5 Punkte) Gegeben sind 5 Objekte mit jeweils zwei reellen Messwerten x_j und y_j .

Objekt j	1	2	3	4	5
x_j	5	3	1	4	6
y_j	-2	-5	-1	4	2

Es wurden bereits die Cluster $C_1 = \{1\}$, $C_2 = \{2, 3\}$ und $C_3 = \{4, 5\}$ gebildet. Führen Sie von dieser Clusterung ausgehend das *Ward-Verfahren* für hierarchisch-agglomeratives Clustern bis zum Ende durch. [$C_1 \cup C_2$, 20.66]

- b) (4 Punkte) (unabhängig von a.)

Gegeben sind 7 Objekte mit den folgenden reellen Messwerten:

Objekt j	1	2	3	4	5	6	7
z_j	-8	-5	-2	0	0	3	4.5

Führen Sie das hierarchisch-agglomerative Clusterungsverfahren mit der *Hausdorff-Distanz* bis zum Ende durch.

3. a) (5 Punkte) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f(x, y) = \ln(e^x + e^y)$$

auf $\mathbb{R}^2$ konvex ist.

- b) (8 Punkte) Lösen Sie das Optimierungsproblem

$$\begin{array}{ll} \min & \ln(e^x + e^y) \\ \text{NB:} & x^2 + y^2 \leq 1 \end{array}$$

mit den KKT-Bedingungen und argumentieren Sie, warum es sich tatsächlich um ein Minimum handelt!

[Das Optimierungsproblem ist konvex und daher ist $\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$ das einzige lokale und globale Minimum.]

4. (9 Punkte) Gegeben ist die Funktion

$$f(x, y) = 2xy^2 - 8x + \frac{4}{3}x^3$$

Bestimmen Sie alle kritischen Punkte und entscheiden Sie jeweils, ob es sich um einen Hoch-, Tief- oder Sattelpunkt handelt!

[(0, 2) und (0, -2) SP; $(\sqrt{2}, 0)$ Min; $(-\sqrt{2}, 0)$ Max]