

Masterkurs Wirtschaftsmathematik und Statistik

Dauer der Prüfung: 90 Minuten

3. März 2025

ZUNAME:			
VORNAME:		MATR.NR.:	

ERLAUBT: **Formelsammlung des Instituts, nicht-programmierbare Taschenrechner**

VERBOTEN: **alle sonstigen Unterlagen, programmierbare Taschenrechner, Handys, etc.**

Für eine positive Beurteilung müssen aus den Beispielen 1,2,3 sowie 4,5 jeweils mindestens 10 Punkte erreicht werden!

1. In einem Schigebiet werden die Anzahl der verkauften Tageskarten erfasst. Dabei wird die Schisaison in drei Abschnitte unterteilt: Vorsaison (V), Hauptsaison (H) und Nachsaison (N). In der folgenden Tabelle finden Sie die Verkaufszahlen aus den letzten Jahren (in 1000).

Jahr	2022			2023			2024			2025
Saisonabschnitt	V	H	N	V	H	N	V	H	N	V
verkaufte Karten (in 1000)	12	64	18	15	72	24	21	75	28	18

- a) (6 Punkte) Bestimmen Sie die geschätzten Saisonkomponenten für eine geeignete Periodenlänge und ermitteln Sie damit die saisonbereinigten Verkaufszahlen.
[$\hat{S}_V = -19,6$, $\hat{S}_H = 33,6$, $\hat{S}_N = -14$]
- b) (3 Punkte) Für die längerfristige Tendenz der Verkaufszahlen wird die Trendfunktion $y = 30 + 3t$ angenommen, wobei t die Saisonabschnitte zählt und $t = 1$ die Vorsaison im Jahr 2022 bezeichnet. In welchem Jahr werden bei dieser Trendfunktion – unter Berücksichtigung der Saisonkomponenten – erstmals in einem Saisonabschnitt mehr als 110.000 Tageskarten verkauft werden? [H im Jahr 2027]
2. a) (4 Punkte) Gegeben sind vier Objekte mit den folgenden 6 binären Merkmalen:

O_1	1	0	1	1	0	1
O_2	0	0	1	0	1	0
O_3	1	1	0	0	0	1
O_4	1	0	0	1	1	1

Führen Sie das hierarchisch-agglomerative Clusterungsverfahren mit *Single Linkage* bis zum Ende durch, wobei für die Distanz (bzw. Ähnlichkeit) von Objekten der *Tanimoto-Koeffizient* zu verwenden ist.

- b) (5 Punkte) (unabhängig von a.) Gegeben sind 8 Objekte mit jeweils drei reellen Messwerten x_j , y_j und z_j .

Objekt j	1	2	3	4	5	6	7	8
x_j	-2	3	-2.5	0	3	4	7	0
y_j	2	-4	5	3	4	1	0	-2
z_j	1	-4.5	1.5	-1.5	3	-1	3	8

Gegeben ist eine Clusterung mit $C_1 = \{1, 3\}$, $C_2 = \{2, 4, 5\}$, $C_3 = \{8\}$ und $C_4 = \{6, 7\}$. Für die Distanzen zwischen den Objekten wird die L_∞ -Norm verwendet. Bestimmen Sie die Distanzen des Clusters C_1 zu allen anderen Clustern mit Single Linkage, Complete

Linkage, Average Linkage und Hausdorff-Distanz, und tragen Sie die entsprechenden Werte in folgende Tabelle ein!

Distanz von C_1 zu	C_2	C_3	C_4
Single Linkage	2.5	7	6
Complete Linkage	9	7	9.5
Average Linkage	5.17	7	7.75
Hausdorff-Distanz	6	7	9

3. Einer Firma steht ein Kapital von m Euro zur Verfügung. Sie möchte um dieses Geld x Mengeneinheiten (ME) einer Ware A (Preis: 2 Euro pro ME) und y ME einer Ware B (Preis: 3 Euro pro ME) kaufen. Den Nutzen, den die Firma aus diesen Käufen ziehen kann, ist durch die Nutzenfunktion

$$U(x, y) = \frac{1}{2} \ln(1 + x) + \frac{1}{4} \ln(1 + y)$$

gegeben.

- (5 Punkte) Berechnen Sie mit Hilfe der Lagrange-Methode den maximale Nutzen, den die Firma erreichen kann.
- (4 Punkte) Zeigen Sie mit Hilfe der geränderten Hesse-Matrix, dass es sich tatsächlich um ein Maximum handelt.
- (3 Punkte) Bezeichne mit $z(m)$ den maximale Nutzen, den die Firma bei einem Budget von m Euro erreichen kann und zeigen Sie, dass $z'(m) = -\lambda$ gilt. Welche ökonomische Interpretation lässt diese Tatsache zu?

$$\left[x = \frac{m+2}{3}, y = \frac{m-4}{9}, \lambda = \frac{-3}{4(m+5)}, z(m) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{m+5}{3}\right) + \frac{1}{4} \ln\left(\frac{m+5}{9}\right) \right]$$

4. Gegeben ist die folgende Funktion:

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{y} + e^{xy} + \frac{1}{z}$$

- (7 Punkte) Bestimmen Sie die Hessematrix von f im Punkt $P = (0, 1, 1)$.
- (3 Punkte) Bestimmen Sie die Definitheit der Matrix aus 4a).

[

$$H_f(0, 1, 1) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ist indefinit.]