

Masterkurs Wirtschaftsmathematik und Statistik

Dauer der Prüfung: 90 Minuten

28. Jänner 2025

ZUNAME:			
VORNAME:		MATR.NR.:	

ERLAUBT: Formelsammlung des Instituts, nicht-programmierbare Taschenrechner

VERBOTEN: alle sonstigen Unterlagen, programmierbare Taschenrechner, Handys, etc.

Für eine positive Beurteilung müssen aus den Beispielen 1,2,3 sowie 4,5 jeweils mindestens 10 Punkte erreicht werden!

Aufgabe	1	2	3	4	5	Summe
max. Punkte	4	10	8	11	11	44
erreichte Punkte						

1. Für ein logistisches Regressions-Modell ist die lineare Funktion $z = -1 + 2x_1 + kx_2 - 3x_3$ mit einem positiven reellen Parameter $k \geq 0$ gegeben.

- a) (2 Punkte) Wie soll k gewählt werden, damit die Odds für eine Beobachtung mit $x_1 = 2$, $x_2 = -3$ und $x_3 = 4$ möglichst groß sind? [k möglichst klein, daher $k = 0$.]
- b) (5 Punkte) Es wird nun $k = 2$ festgelegt und die folgende Stichprobe mit 5 Datensätzen betrachtet:

i	x_1	x_2	x_3	y
1	1	-1	0.5	0
2	2	-2	1	1
3	0	-1	-2	1
4	0	-2	-3	1
5	1	-1	1	0

Testen Sie mit Hilfe der Devianz die Güte des Modells ($\alpha = 0.05$). Was ist die Aussage Ihres Tests? Was können Sie näherungsweise über das Signifikanzniveau dieser Aussage sagen? [$Dev = 8.364$, $K = [3.841, \infty)$, $\alpha^* \approx 0.004$]

- c) (3 Punkte) (weiterhin gilt $k = 2$) Es soll geprüft werden, ob die Variable x_2 für das Modell wesentlich ist. Nach Streichen von x_2 wurde das reduzierte logistische Regressions-Modell mit $z^R = -2 + 2x_1 - 2x_3$ aufgestellt. Prüfen Sie mit einem statistischen Test, ob x_2 für das Modell wesentlich ist ($\alpha = 0.1$). Was ist die Aussage Ihres Tests? [$Dev^R = 2.557$, $K = [2.706, \infty)$]

Quantile der χ^2 -Verteilungen:

f	$\gamma = 0,005$	0,01	0,025	0,05	0,1	0,9	0,95	0,975	0,99	0,995	0,999
1	0,0	0,0002	0,001	0,004	0,016	2,706	3,841	5,024	6,635	7,879	10,828
2	0,010	0,020	0,051	0,103	0,211	4,605	5,991	7,378	9,210	10,597	13,816
3	0,072	0,115	0,216	0,352	0,584	6,251	7,815	9,348	11,345	12,838	16,266
4	0,207	0,297	0,484	0,711	1,064	7,779	9,488	11,143	13,277	14,860	18,467

2. a) (5 Punkte) Gegeben sind 6 Objekte als Punkte in der Ebene mit den folgenden Koordinaten.

Objekt i	1	2	3	4	5	6
x_i	-2	-2.5	0	1	2	-3
y_i	-3	6	-1.5	2.5	-1	0

Führen Sie das hierarchisch-agglomerative Clusterungsverfahren mit *Complete Linkage* unter Verwendung der L_∞ -Norm bis zum Ende durch.

- b) (unabhängig von (a)) (3 Punkte)

Gegeben sind 12 Objekte mit folgenden ein-dimensionalen Daten:

Objekt i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
a_i	-12	-10	-9	-5	-2	-2	0	3	4	9	11	16

Die folgende Clusterung ist bereits gegeben:

$$C_1 = \{1, 2, 3\}, C_2 = \{4, 5, 6\}, C_3 = \{7, 8\}, C_4 = \{9, 10, 11, 12\}.$$

Führen Sie ausgehend von dieser Clusterung das hierarchisch-agglomerative Clusterungsverfahren mit *Centroid Clustering* bis zum Ende durch. [Anfangsdist. 7.33, 4.5, 8.5]

3. Gegeben sind

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & a \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \\ a & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{z} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

mit dem Parameter $a \in \mathbb{R}$.

- a) (2 Punkte) Setzen Sie $a = 3$ und berechnen Sie $\vec{z}^t A \vec{z}$.
b) (2 Punkte) Setzen Sie wiederum $a = 3$ und geben Sie die Funktion $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \vec{x}^t A \vec{x}$ explizit ohne der Verwendung von Matrizen an. Was ist $f(-1, -1, 1, 3)$?
c) (6 Punkte) Bestimmen Sie die Definitheit der Matrix A in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$.
d) (1 Punkt) Für welche reellen Werte von a gibt es einen Vektor $\vec{x} \neq \vec{0}$ mit $\vec{x}^t A \vec{x} > 0$?

[

- a) $\vec{z}^t A \vec{z} = -1$.
b) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = -x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_1x_4 - 2x_2^2 - 3x_3^2 + 3x_4^2$ und $f(-1, -1, 1, 3) = -1$.
c) Die Matrix A ist für

$$a \in \begin{cases} \left(-\frac{1}{6}, 0\right) & \text{negativ definit} \\ \left\{0, -\frac{1}{6}\right\} & \text{negativ semi-definit} \\ \left(-\infty, -\frac{1}{6}\right) \cup (0, \infty) & \text{indefinit} \end{cases}$$

- d) $a \in \left(-\infty, -\frac{1}{6}\right) \cup (0, \infty)$

]

4. (11 Punkte) Gegeben ist die Funktion

$$f(x, y) = \ln(1 + x^2 + y) - 2y.$$

Bestimmen Sie alle stationären Punkte und stellen Sie jeweils fest, ob es sich um ein Maximum, ein Minimum oder einen Sattelpunkt handelt!

[$\left(0, -\frac{1}{2}\right)$ ist ein Sattelpunkt]