

# Masterkurs Wirtschaftsmathematik und Statistik

Dauer der Prüfung: 90 Minuten

19. Juni 2024

|          |  |           |  |
|----------|--|-----------|--|
| ZUNAME:  |  |           |  |
| VORNAME: |  | MATR.NR.: |  |

ERLAUBT: **Formelsammlung des Instituts, nicht-programmierbare Taschenrechner**

VERBOTEN: **alle sonstigen Unterlagen, programmierbare Taschenrechner, Handys, etc.**

**Für eine positive Beurteilung müssen aus den Beispielen 1,2,3 sowie 4,5 jeweils mindestens 10 Punkte erreicht werden!**

| Aufgabe          | 1 | 2 | 3 | 4  | 5  | Summe |
|------------------|---|---|---|----|----|-------|
| max. Punkte      | 4 | 9 | 9 | 11 | 11 | 44    |
| erreichte Punkte |   |   |   |    |    |       |

1. Für ein logistisches Regressions-Modell werden zwei lineare Funktionen  $z_1 = -2 + x_1 + 3x_2 - 2x_3$  und  $z_2 = 3 - 2x_1 + 2x_2 - 2x_3$  vorgeschlagen. Es ist eine Stichprobe mit den folgenden 4 Datensätzen gegeben:

| $i$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $y$ |
|-----|-------|-------|-------|-----|
| 1   | 1     | 1     | 2     | 1   |
| 2   | 2     | -1    | 1     | 0   |
| 3   | 3     | 0     | -2    | 1   |
| 4   | 4     | -2    | -3    | 1   |

- a) (2 Punkte) Welche der beiden linearen Funktionen ergibt für diese Stichprobe eine bessere hit-ratio? [ $h_1 = 0.75$ ,  $h_2 = 0.5$ ]
- b) (5 Punkte) Testen Sie mit Hilfe der Devianzen, ob ein Unterschied zwischen den beiden Modellen mit  $z_1$  und  $z_2$  bestätigt werden kann ( $\alpha = 0.1$ ). Was ist die Aussage Ihres Tests? Was können Sie näherungsweise über das Signifikanzniveau dieser Aussage aussagen? [ $Dev_1 = 4.538$ ,  $Dev_2 = 9.38$ ,  $t = 4.842$ ,  $K = [2.706, \infty)$ ,  $\alpha^* \approx 0.03$ ]
- c) (2 Punkte) Es wird nun  $z_1$  für das logistische Regressions-Modell herangezogen. Gegeben ist die Beobachtung:  $x_1 = -2$  und  $x_2 = 1$ . Für welche Werte von  $x_3$  wird  $y = 1$  prognostiziert? Für welche Werte von  $x_3$  sind die Odds für das Ergebnis  $y = 1$  mindestens 3 ? [ $x_3 \leq -0.5$ ,  $x_3 \leq -1.05$ ]

Quantile der  $\chi^2$ -Verteilungen:

| $f$ | $\gamma = 0,005$ | 0,01   | 0,025 | 0,05  | 0,1   | 0,9   | 0,95  | 0,975  | 0,99   | 0,995  | 0,999  |
|-----|------------------|--------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|--------|--------|--------|
| 1   | 0,0              | 0,0002 | 0,001 | 0,004 | 0,016 | 2,706 | 3,841 | 5,024  | 6,635  | 7,879  | 10,828 |
| 2   | 0,010            | 0,020  | 0,051 | 0,103 | 0,211 | 4,605 | 5,991 | 7,378  | 9,210  | 10,597 | 13,816 |
| 3   | 0,072            | 0,115  | 0,216 | 0,352 | 0,584 | 6,251 | 7,815 | 9,348  | 11,345 | 12,838 | 16,266 |
| 4   | 0,207            | 0,297  | 0,484 | 0,711 | 1,064 | 7,779 | 9,488 | 11,143 | 13,277 | 14,860 | 18,467 |

2. Gegeben sind 6 Objekte als Punkte in der Ebene mit den folgenden Koordinaten.

| Objekt $i$ | 1  | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|------------|----|---|---|---|---|---|
| $x_i$      | -1 | 2 | 0 | 1 | 2 | 4 |
| $y_i$      | 3  | 4 | 1 | 3 | 1 | 0 |

a) (5 Punkte) Führen Sie das hierarchisch-agglomerative Clusterungsverfahren mit *Average Linkage* unter Verwendung der  $L_\infty$ -Norm bis zum Ende durch.

b) (4 Punkte) (unabhängig von (a))

Betrachtet wird die Clusterung  $C_1 = \{1, 2, 4\}$ ,  $C_2 = \{3\}$  und  $C_3 = \{5, 6\}$ . Bestimmen und interpretieren(!) Sie die  $F$ -Werte und die  $t$ -Werte beider Merkmale für den Cluster  $C_1$ .

[  $F_x = 0.61$ ,  $F_y = 0.11$ ,  $t_x = -0.415$ ,  $t_y = 0.94$  ]

3. Für einen Parameter  $b \in \mathbb{R}$  ist die folgende Funktion gegeben:

$$f(x_1, x_2, x_3) = 75x_1^2 + 7x_2^2 + 2bx_1x_3 + 12x_3^2$$

a) (2 Punkte) Bestimmen Sie die symmetrische Matrix  $A$ , so dass für alle  $\vec{x}^t = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$  gilt:  $f(x_1, x_2, x_3) = \vec{x}^t A \vec{x}$ .

b) (5 Punkte) Für welche Werte von  $b \in \mathbb{R}$  ist die Matrix  $A$  positiv definit?

c) (2 Punkte) Für welche Werte von  $b$  gibt es einen Vektor  $\vec{x}^t = (x_1, x_2, x_3) \neq (0, 0, 0)$ , so dass  $f(x_1, x_2, x_3) \leq 0$  ?

d) (2 Punkte) Setzen Sie nun  $b = 40$ . Gibt es dann ein  $\vec{x}^t = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ , so dass  $\vec{x}^t A \vec{x} < 0$  ?

Lösung:

a)  $A = \begin{pmatrix} 75 & 0 & b \\ 0 & 7 & 0 \\ b & 0 & 12 \end{pmatrix}$

b)  $-30 < b < 30$

c)  $b \in (-\infty, -30] \cup [30, \infty)$

d) ja, da  $A$  indefinit

4. (11 Punkte) Gegeben ist die folgende Funktion:

$$f(x, y) = e^{4x} - \frac{\ln(x-1)}{y^2}$$

Bestimmen Sie alle kritischen Punkte der Funktion und entscheiden Sie jeweils, ob es sich um einen Hoch-, Tief- oder Sattelpunkt handelt!

[ Sattelpunkte:  $\left(2, \frac{1}{2e^4}\right)$  und  $\left(2, \frac{-1}{2e^4}\right)$  ]