Masterkurs Wirtschaftsmathematik und Statistik

Dauer der Prüfung: 90 Minuten **20. November 2023**

ZUNAME:			
VORNAME:		MATR.NR.:	

ERLAUBT: **Formelsammlung des Instituts, nicht-programmierbare Taschenrechner**

VERBOTEN: **alle sonstigen Unterlagen, programmierbare Taschenrechner, Handys, etc.**

Für eine positive Beurteilung müssen aus den Beispielen 1,2,3 sowie 4,5 jeweils mindestens 10 Punkte erreicht werden!

1. a) (6 Punkte) Für die Prognose von y-Werten auf Basis von gegebenen x-Werten soll eine Regressionsfunktion der Form $y = -4 + a\sqrt{x} + b\ln(x)$ verwendet werden. Bestimmen Sie die Werte der Koeffizienten a und b aus den folgenden 4 Messwerten mit der Methode der kleinsten Fehlerquadrate. (Sie können auch in den Zwischenschritten auf 2 Dezimalen runden.) [mit Rundungsfehlern: $a = 4.23$, $b = -2.15$]

Wert i	1	2	3	4
x_i	1	2	4	e^2
y_i	0	1	1.5	3

   b) (3 Punkte) Für die Glättung einer Zeitreihe mit Niveaukorrektur nach Holt-Winters sind die Parameter $\alpha = 0.6$ und $\beta = 0.8$ gegeben. Bekannt sind die Werte der Niveaukorrektur $b_2 = 0.16$ und $b_3 = 0.1952$ sowie der geglättete Wert $g_3^H = 1.648$. Bestimmen Sie die ersten drei Werte der ursprünglichen Zeitreihe. [$y_1 = 1$, $y_2 = 3$, $y_3 = 2$]

2. Gegeben sind 8 Objekte mit jeweils drei reellen Messwerten x_j, y_j und z_j.

Objekt j	1	2	3	4	5	6	7	8
x_j	-2	3	-2.5	0	3	4	7	0
y_j	2	-4	5	3	4	1	0	-2
z_j	1	-4.5	1.5	-1.5	3	-1	3	8

   a) (5 Punkte) Gegeben ist eine Clusterung mit $C_1 = \{1, 3\}$, $C_2 = \{2, 4, 5\}$, $C_3 = \{8\}$ und $C_4 = \{6, 7\}$. Führen Sie einen Schritt des hierarchisch-agglomerative Clusterungsverfahrens mit *Centroid Linkage* unter Verwendung der L_1-Norm durch. [$C_2 \cup C_4$]

   b) (3 Punkte), unabhängig von a.)
   Gegeben sind vier Objekte mit den folgenden 8 binären Merkmalen:

O_1	1	0	1	0	1	1	0	1
O_2	0	0	1	0	0	0	1	0
O_3	1	1	0	0	1	0	0	0
O_4	1	0	1	0	0	1	1	1

   Bestimmen Sie die *Distanz* von Objekt O_2 zu O_4. Wählen Sie dafür jene Maßzahl aus den vier in der Vorlesung behandelten Varianten, welche die geringste *Distanz* ergibt.
   [SMC: 3/8]

3. Betrachten Sie das folgende Optimierungsproblem:

$$\begin{array}{rlcl} \text{minimiere} & x^2 + 2y^2 + az^2 + & 2(xy + yz + xz) & \\ \text{unter} & -x - y + z & \leq & 0 \\ & -2x + y & \leq & 0 \\ & -x + 2y - 2z & \leq & -3 \end{array}$$

für eine beliebige reelle Zahl a.

a) (4 Punkte) Für welche Werte von a ist das Optimierungsproblem konvex?

b) (2 Punkte) Berechnen Sie die Gradienten aller Nebenbedingungen im Punkt $P = (1, 2, 3)$. Welche Nebenbedingungen sind im Punkt P aktiv?

c) (4 Punkte) Setzen Sie nun $a = 3$. Liegt im Punkt P der negative Gradient der Zielfunktion im Kegel, der von den Gradienten der aktiven Nebenbedingungen aufgespannt wird? Was können Sie damit über die Optimalität des Punktes P für das Optimierungsproblem aussagen?

a) $a \geq 1$

b)

$$\operatorname{grad} g_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \operatorname{grad} g_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \operatorname{grad} g_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

alle Nebenbedingungen sind aktiv.

c) Nein. P ist daher kein Minimum.

4. Gegeben ist die Zielfunktion

$$f(x, y) = x^2 + (y - 1)^2$$

und die Nebenbedingung:

$$9x^2 + y^2 = 9$$

a) (7 Punkte) Bestimmen Sie mit Hilfe der **Lagrange-Methode** alle kritischen Punkte des Problems!

b) (5 Punkte) Bestimmen Sie die geänderte Hessematrix für den kritischen Punkt mit größter y-Koordinate und stellen Sie fest, ob es sich bei diesem Punkt um ein Maximum, ein Minimum oder einen Sattelpunkt handelt. Handelt es sich sogar um ein globales Optimum?

a) $(0; 3)$, $(0; -3)$, $\left(\frac{\sqrt{55}}{8}; \frac{9}{8}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{55}}{8}; \frac{9}{8}\right)$

b) $(0, 3)$ ist lokales (aber kein globales) Maximum.