Masterkurs Wirtschaftsmathematik und Statistik

Dauer der Prüfung: 90 Minuten **21. April 2023**

ZUNAME:			
VORNAME:		MATR.NR.:	

ERLAUBT: **Formelsammlung des Instituts, nicht-programmierbare Taschenrechner**

VERBOTEN: **alle sonstigen Unterlagen, programmierbare Taschenrechner, Handys, etc.**

Für eine positive Beurteilung müssen aus den Beispielen 1,2,3 sowie 4,5 jeweils mindestens 10 Punkte erreicht werden!

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**Summe**
max. Punkte	4	8	10	11	11	44
erreichte Punkte						

1. Im Standesamt der Stadt G. kann an den Wochentagen Mittwoch, Donnerstag, Freitag und Samstag geheiratet werden. Um den Anstieg der Hochzeitszahlen zu analysieren ohne die Gesamtwerte für das ganze Jahr erheben zu müssen, hat der Bürgermeister von P. die Zahlen jeweils für die (erfahrungsgemäß sehr beliebte) letzte Mai-Woche erheben lassen und folgende Daten erhalten (in G. gab es keine Corona-Einschränkungen).

Jahr	2020		2021				2022			
Wochentag	Frei	Sam	Mit	Don	Frei	Sam	Mit	Don	Frei	Sam
Hochzeiten	4	8	2	6	4	10	4	8	6	14

   a) (6 Punkte) Bestimmen Sie die geschätzten Saisonkomponenten für eine geeignete Periodenlänge und ermitteln Sie damit die saisonbereinigten Hochzeitszahlen für das Jahr 2022. [$6.8125, 7.3125, 7.6875, 10.1875$]

   b) (2 Punkte) Der Standesbeamte von P. hat für die Hochzeitszahlen H (ohne Berücksichtigung der unterschiedlich beliebten Wochentage) folgende lineare Regressionsfunktion aufgestellt: $H = 1.2\,t - 6$, wobei $t = 1$ dem Mittwoch (Achtung!) 2020 entspricht. Prognostizieren Sie damit die Zahl von Hochzeiten am Freitag und am Samstag der letzten Mai-Woche von 2025. [$19.9125, 26.6125$]

2. a) (6 Punkte) Gegeben sind 6 Objekte mit folgenden reellen Messwerten a_i.

Objekt i	1	2	3	4	5	6
a_i	-5	0	4	5	6	14

   Führen Sie das hierarchisch-agglomerative Clustern der a_i -Werte mit dem *Ward-Verfahren* bis zum Ende durch. [(3,4); (3,4,5); (1,2); (3,4,5,6)]

b) (unabhängig von a.)
Gegeben sind 4 Objekte O_1 bis O_4 mit den folgenden 7 binären Merkmalen $M1$ bis $M7$:

	$M1$	$M2$	$M3$	$M4$	$M5$	$M6$	$M7$
O_1	1	0	0	0	1	1	1
O_2	0	1	1	0	1	0	1
O_3	0	1	0	1	1	0	1
O_4	1	1	0	1	0	1	0
O_5							

i. (3 Punkte) Bestimmen Sie eine Ähnlichkeitsmatrix der Objekte O_1 bis O_4 unter Verwendung des Sorensen-Koeffizienten.

ii. (1 Punkt) Geben Sie die Merkmale eines neuen Objekts O_5 in der obigen Tabelle an, das vom Cluster $C = \{O_3, O_4\}$ einen möglichst geringen Abstand nach *single linkage* besitzt. [z.B. $O_5 = O_3$ oder $O_5 = O_4$]

3. (11 Punkte) Gegeben ist die Funktion

$$f(x, y, z) = \ln(x) + 2\ln(y) + \ln(1 - x - y) - z^2.$$

Bestimmen Sie alle stationären Punkte der Funktion und entscheiden Sie jeweils, ob es sich um einen Hoch-, Tief- oder Sattelpunkt handelt!

[Max $= (1/4, 1/2, 0)$]

4. Gegeben ist das Optimierungsproblem

$$\begin{array}{rrcl} \text{maximiere} & e^x + y + z & & \\ \text{unter} & x + y + z & = & 1 \\ & x^2 + y^2 + z^2 & = & 1 \end{array}$$

a) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass der Punkt $P = (1, 0, 0)$ die notwendige Bedingung der Lagrange-Methode erfüllt!

b) (6 Punkte) Weisen Sie mit Hilfe der geränderten Hessematrix nach, dass es sich bei P tatsächlich um ein Maximum handelt.

c) (2 Punkte) Um wie viel ändert sich der optimale Zielfunktionswert näherungsweise, wenn

i. die erste Nebenbedingungen durch $x + y + z = 1,02$ ersetzt wird?

ii. die zweite Nebenbedingungen durch $x^2 + y^2 + z^2 = 0,98$ ersetzt wird?

[Der optimale Zielfunktionswert ändert sich um $\frac{1}{50}$ bzw. um $\frac{1-e}{100}$.]