Masterkurs Wirtschaftsmathematik und Statistik

Dauer der Prüfung: 90 Minuten **6. März 2023**

ZUNAME:			
VORNAME:		MATR.NR.:	

ERLAUBT: **Formelsammlung des Instituts, nicht-programmierbare Taschenrechner**

VERBOTEN: **alle sonstigen Unterlagen, programmierbare Taschenrechner, Handys, etc.**

Für eine positive Beurteilung müssen aus den Beispielen 1,2,3 sowie 4,5 jeweils mindestens 10 Punkte erreicht werden!

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**Summe**
max. Punkte	5	9	8	10	12	44
erreichte Punkte						

1. Betrachtet wird eine logistische Regression basierend auf der linearen Funktion $z = -5 - 3x_1 + 2x_2 + b_3x_3$.

   a) (4 Punkte) Gegeben ist ein Datensatz mit $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -3$ und $y = 1$. Bestimmen Sie $b_3 \in [-8, 8]$ so, dass die Loglikelihoodfunktion für diesen Datensatz einen möglichst hohen Wert erreicht. [$b_3 = -8$ wegen Monotonie]

   b) (5 Punkte), unabhängig von a.) *Verwenden Sie nun* $b_3 = 1$.
   Es ist eine Stichprobe mit den folgenden 5 Datensätzen gegeben:

i	x_1	x_2	x_3	y
1	2	3	3	0
2	2.5	5	1.5	0
3	-2	1	0	1
4	-1	0	1	0
5	2	5	2	1

   Bestimmen Sie die hit-ratio und die Devianz für das Modell. Testen Sie mit Hilfe der Devianz die Güte des Modells ($\alpha = 0.1$). Was ist die Aussage Ihres Tests? Müssen Sie den Wert von α vergrößern oder verkleinern, um eine andere Aussage zu erhalten? [$h = 1$, $Dev = 2.23$, $K = [2.706, \infty)$, α vergrößern]

Quantile der χ^2-Verteilungen:

f	γ =0,005	0,01	0,025	0,05	0,1	0,9	0,95	0,975	0,99	0,995	0,999
1	0,0	0,0002	0,001	0,004	0,016	2,706	3,841	5,024	6,635	7,879	10,828
2	0,010	0,020	0,051	0,103	0,211	4,605	5,991	7,378	9,210	10,597	13,816
3	0,072	0,115	0,216	0,352	0,584	6,251	7,815	9,348	11,345	12,838	16,266
4	0,207	0,297	0,484	0,711	1,064	7,779	9,488	11,143	13,277	14,860	18,467

2. Gegeben sind 6 Objekte mit jeweils zwei reellen Messwerten x_j und y_j.

Objekt j	1	2	3	4	5	6
x_j	2	-2	-2	-1	-1	4
y_j	2	-4	3	2	-2	2

a) (5 Punkte) Führen Sie das hierarchisch-agglomerative Clusterungsverfahren mit *Complete Linkage* unter Verwendung der L_2-Norm (Euklidsche Norm) bis zum Ende durch.

b) (3 Punkte) Es liegt nun eine Clusterung mit $C_1 = \{1, 6\}$, $C_2 = \{3, 4\}$ und $C_3 = \{2, 5\}$ vor. Fügen Sie einen neuen Messwert (x_7, y_7) zum Cluster C_2 dazu, sodass beim hierarchisch-agglomerativen Clusterungsverfahren mit *Single Linkage* unter Verwendung der L_2-Norm im nächsten Schritt C_2 mit C_3 fusioniert wird. [z.B. $(x_7, y_7) = (x_2, y_2)$]

3. Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} a & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & a-3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 2 & 3 & 5 \\ 7 & 5 & 12 \end{pmatrix},$$

die Vektoren

$$y = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad z = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

und die Funktion

$$f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2 - 3x_1x_3 - 2x_3^2.$$

a) (5 Punkte) Für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ ist die Matrix A positiv bzw. negativ definit? [für $a > 5$ positiv definit, kann nicht negativ definit sein]

b) (3 Punkte) Berechnen Sie y^tBy und z^tBz. Was können Sie daraus über die Definitheit von B schließen? (Verwenden Sie keine anderen Informationen und begründen Sie Ihr Ergebnis!) [Matrix kann indefinit oder positiv semidefinit sein]

c) (2 Punkte) Geben Sie zur Funktion $f(x_1, x_2, x_3)$ eine symmetrische Matrix C an, sodass $f(x_1, x_2, x_3) = x^tCx$ gilt. [$C = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1.5 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1.5 & 0 & -2 \end{pmatrix}$]

4. Gegeben ist das Optimierungsproblem

$$\begin{array}{rrl} \text{minimiere} & x+y & \\ \text{unter} & x^2+y^2 & \leq 8 \\ & 2x-y^2 & \geq 0 \end{array}$$

a) (3 Punkte) Zeichnen Sie den zulässigen Lösungsbereich in das untenstehende Koordinatensystem ein! Ist der zulässige Bereich konvex bzw. beschränkt?

b) (9 Punkte) Lösen Sie das Problem mit Hilfe der KKT-Bedingungen und argumentieren Sie, warum tatsächlich ein Minimum vorliegt!

[MIN $(1/2, -1)$]