Masterkurs Wirtschaftsmathematik und Statistik

Dauer der Prüfung: 90 Minuten **30. Jänner 2023**

ZUNAME:			
VORNAME:		MATR.NR.:	

ERLAUBT: **Formelsammlung des Instituts, nicht-programmierbare Taschenrechner**

VERBOTEN: **alle sonstigen Unterlagen, programmierbare Taschenrechner, Handys, etc.**

Für eine positive Beurteilung müssen aus den Beispielen 1,2,3 sowie 4,5 jeweils mindestens 10 Punkte erreicht werden!

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**Summe**
max. Punkte	4	9	9	11	11	44
erreichte Punkte						

1. a) (6 Punkte) Für die Prognose von y-Werten auf Basis von gegebenen x-Werten soll eine Regressionsfunktion der Form

$$y = a \cdot \ln x + b \cdot x^2$$

verwendet werden. Bestimmen Sie die Werte der Koeffizienten a und b aus den folgenden vier Messwerten mit der Methode der kleinsten Fehlerquadrate. [$a = 2.352$, $b = -0.156$]

Wert i	1	2	3	4
x_i	1	2	e	3
y_i	-2	0	1	2

b) (3 Punkte) Gegeben ist die Zeitreihe $5, 8, 9, 15, \ldots$. Es soll eine Glättung nach Holt-Winters mit $\alpha = 0.7$ durchgeführt werden. Was ist der höchste Wert, der für g_3^H erreicht werden kann, wenn β im zulässigen Bereich frei gewählt werden kann? Begründen Sie Ihre Antwort! [$\beta = 0$, $g_3^H = 9$]

2. Gegeben sind 6 Objekte mit jeweils zwei reellen Messwerten x_j und y_j.

Objekt j	1	2	3	4	5	6
x_j	-2	3	-1	6	0	-5
y_j	7	5	-4	9	-2	4

a) (4 Punkte) Gegeben sind die Cluster $C_1 = \{1, 3, 6\}$, $C_2 = \{2, 5\}$ und $C_3 = \{4\}$. Führen Sie – ausgehend von dieser Clusterung – das hierarchisch-agglomerative Clusterungsverfahren mit *Average Linkage* unter Verwendung der $L_\infty-$Norm bis zum Ende durch. [6.5, 10.666, 7.5]

b) (3 Punkte) (unabhängig von (a))
Gegeben sind die Cluster $C_a = \{2, 6\}$, $C_b = \{1, 4, 5\}$ und $C_c = \{3\}$. Bestimmen Sie die vollständige Cluster-Distanzmatrix für *Centroid Clustering* unter Verwendung der L_1-Norm. [2.5, 8.5, 11]

c) (2 Punkte) Wie lautet die Fehlerquadratsumme (ESS-Zahl) der Clusterung (C_a, C_b, C_c) aus 3.b) ? [135.8]

3. Betrachten Sie das folgende Optimierungsproblem:

$$\begin{array}{rll} \text{minimiere} & x^2 + axy + y^2 & \\ \text{unter} & x^2 - y & \leq \ 0 \\ & x + y - 2 & \leq \ 0 \end{array}$$

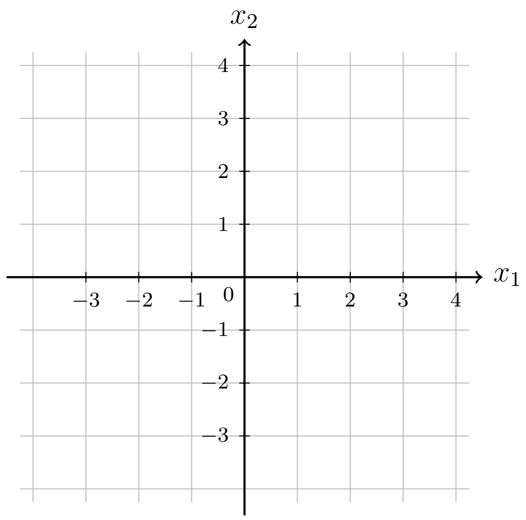
für eine beliebige reelle Zahl a.

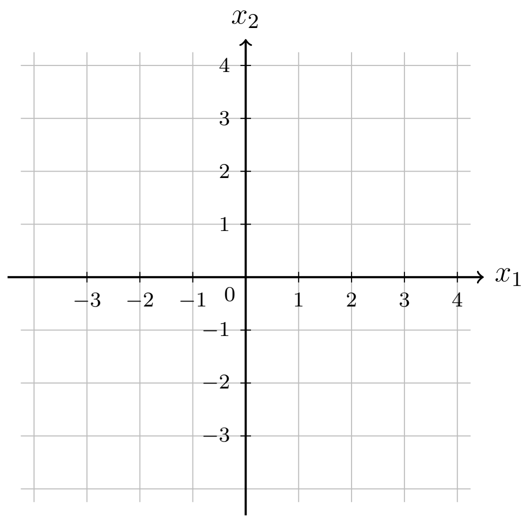
a) (3 Punkte) Skizzieren Sie den zulässigen Lösungsbereich in das linke untenstehende Koordinatensystem! Ist der Bereich konvex?

b) (3 Punkte) Für welche Werte von a ist die Zielfunktion konvex?

c) (3 Punkte) Berechnen Sie die Gradienten aller Nebenbedingungen im Punkt $P = (1, 1)$. Welche Nebenbedingungen sind im Punkt P aktiv? Zeichnen Sie den Kegel, der von den Gradienten der aktiven Nebenbedingungen aufgespannt wird in das rechte untenstehende Koordinatensystem ein!

d) (2 Punkte) Setzen Sie nun $a = -4$ und zeichnen Sie auch den Gradienten der Zielfunktion im Punkt $P = (1, 1)$ in das rechte Koordinatensystem ein. Was können Sie damit über die Optimalität des Punktes P für das Optimierungsproblem mit $a = -4$ aussagen?





Lösung:

a) Bereich konvex

b) $-2 \leq a \leq 2$

c)

$$\operatorname{grad} g_1(1,1) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \operatorname{grad} g_2(1,1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

d)

$$\operatorname{grad} f(1,1) = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Beide Nebenbedingungen sind aktiv. P ist nicht optimal, weil $\operatorname{grad} f(1,1)$ nicht im Kegel, der von $\operatorname{grad} g_1(1,1)$ und $\operatorname{grad} g_2(1,1)$ aufgespannt wird, liegt.

4. Gegeben ist das Optimierungsproblem:

$$\begin{aligned} \max \quad & x \qquad + 2z \\ \text{unter} \quad & x + y + z = 1 \\ & \quad y^2 + z = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

a) (5 Punkte) Bestimmen Sie mit der Methode von Lagrange alle kritischen Punkte für dieses Problem.

b) (6 Punkte) Überprüfen Sie mit Hilfe der geränderten Hessematrix, ob es sich bei den kritischen Punkten tatsächlich um ein Maximum handelt.

[$P = \left(\frac{5}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ ist ein Maximum]