Kapitel 3

Entscheidungs-rechnungen bei Unsicherheit

© Ewert/Wagenhofer/Rohlfing-Bastian 2023.
Alle Rechte vorbehalten!

Ziele

- Darstellung der Vorgehensweise bei der Break Even-Analyse
- Analyse der Auswirkungen von Unsicherheit auf die Produktionsprogrammplanung und der Struktur der Lösungen bei Marktwertmaximierung und Erwartungsnutzenmaximierung
- Aufzeigen der Entscheidungsrelevanz von Fixkosten unter verschiedensten Bedingungen

Motivation

- **Gründe für Annahme sicherer Erwartungen bei KLR**
  - KLR dient kurzfristig wirksamen Entscheidungen
  - Erläuterung grundlegender Prinzipien
- **Gegenargument**
  - Stimmigkeit obiger Argumente erst nach Analyse unter Einbeziehung von Unsicherheit beurteilbar

- **Einbeziehung von Unsicherheit**

Behandelte Ansätze

- Break Even-Analyse
- Modellansätze für kurzfristig wirksame Entscheidungen und Lösungsstrukturen am Beispiel von Produktionsprogrammentscheidungen

Besondere Fragen dabei

- Messung von Risiko
- Entscheidungskontext: z.B. Handelbarkeit des Eigenkapitals
- Entscheidungsrelevanz von Fixkosten

Break Even-Analyse
Grundlagen

- **Grundidee**
  - Einfluss von exogenen Parametern auf die Lösung von Entscheidungsproblemen
- **Methode: Sensitivitätsanalyse**
  - Empfindlichkeit der Zielgrößen auf Änderungen der Parameter
  - Ermittlung des “günstigen” Parameterbereichs: Entscheidung bleibt optimal
- **Grundmodell der Break Even-Analyse**
  Fokus auf Beschäftigungsunsicherheit
  - Ermittlung einer Break Even-Menge
  - Ermittlung anderer kritischer Parameterwerte möglich

BEA im Einproduktfall

Bestimmung des Periodengewinns

$$G = \left(p - k\right) \cdot x - K^F = d \cdot x - K^F$$

mit

d	Deckungsbeitrag
k	variable Stückkosten je Produkteinheit
p	Absatzpreis je Produkteinheit
x	Produkteinheiten
K^F	Fixkosten

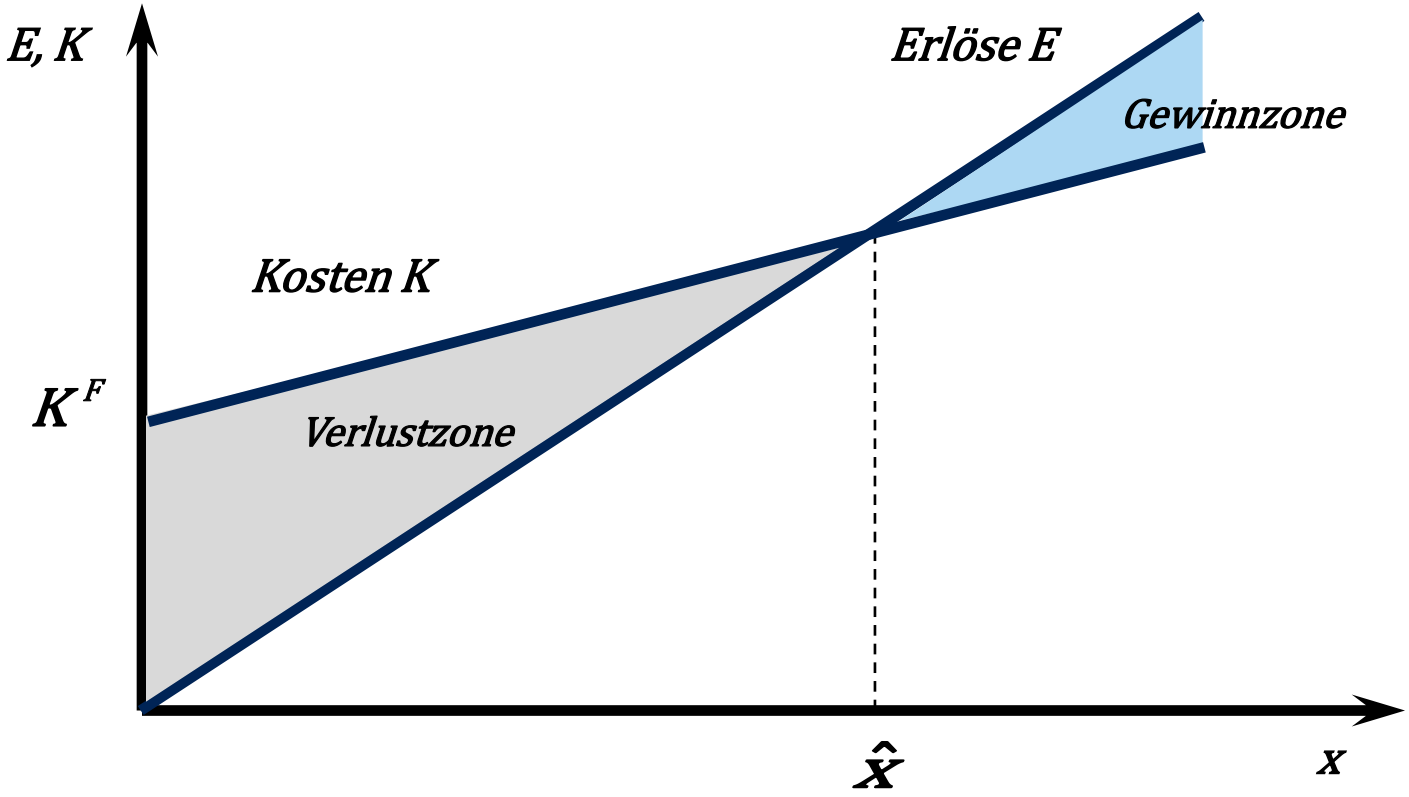
$$\hat{x} = \frac{K^F}{d} = \frac{K^F}{p - k}$$

BEA im Einproduktfall
Beispiel

Beispiel

Absatzpreis = 100, variable Kosten = 40, Fixkosten = 120.000

$BEM = 120.000/(100 - 40) = 2.000$



BEA im Einproduktfall
Andere kritische Werte

Kritischer Gewinn G

$$\hat{x} = \frac{K^F + \underline{G}}{d}$$

Break Even-Preis

$$\hat{p} = k + \frac{K^F + \underline{G}}{x}$$

Break Even-Stückkosten

$$\hat{k} = p - \frac{K^F + \underline{G}}{x}$$

BEA im Einproduktfall
Fortsetzung Beispiel

Fixkosten =	120.000
Absatzpreis =	100
variable Kosten =	40
Menge =	1.800
kritischer Gewinn =	0

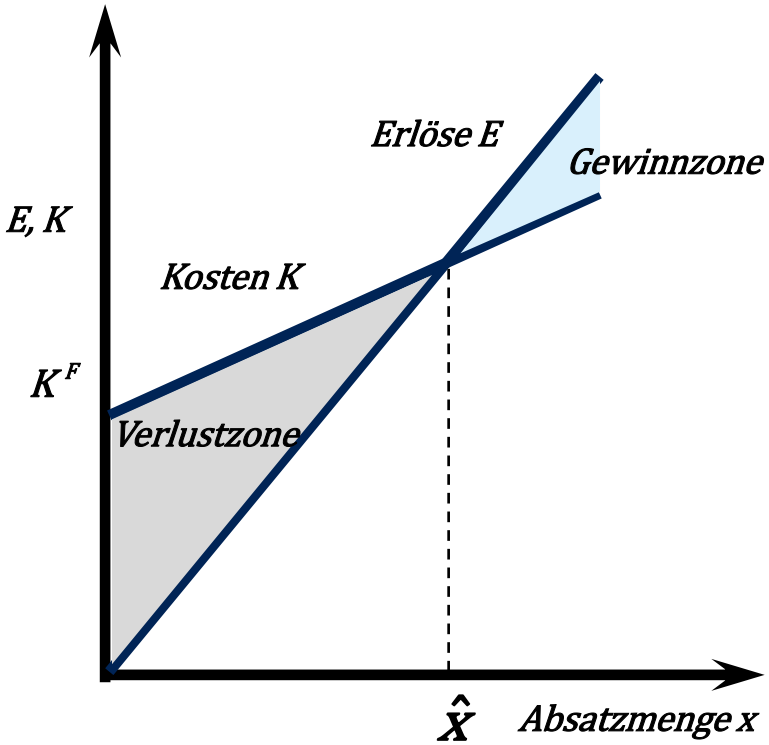
Break Even-Preis = 40 + 120.000/1.800 = 106,67

für Absatzpreis = 90
Break Even-Stückkosten = 90 – 120.000/1.800 = 23,33

Für Absatzpreis = 80
Break Even-Stückkosten = 80 – 120.000/1.800 = 13,33

BEA im Einproduktfall
Auswertungen

- **Beeinflussung der *Break Even-Menge* durch**
  - Veränderung der proportionalen Stückkosten
  - Veränderung des Absatzpreises
  - Veränderung des Mindestgewinns
  - Erhöhung des Fixkostenblocks durch zusätzliche Werbemaßnahmen, Einstellung von zusätzlichem Verkaufspersonal
  - Änderung auf Produktionsverfahren in Richtung niedrigerer variabler Stückkosten bei höheren Fixkosten
- **Deckung auszahlungswirksamer Teile der Fixkosten ("Cash-Point")**



Break Even-Analyse
Mehrproduktfall

- Ausgleichseffekte zwischen verschiedenen Produktarten
- Produktionsprogramm soll in seiner Gesamtheit ein bestimmtes Ergebnis bescheren
- Nicht mehr eine Break Even-Menge, sondern eine Vielzahl von Mengenkombinationen
  - Absatzmengenkombinationen der Produktarten $j = 1, ..., J$:

$$\hat{X} = \left\{ \hat{x} \geq 0 \,\middle|\, \sum_{j=1}^{J} \hat{x}_j \cdot d_j = K^F + \underline{G} \right\}$$

$$\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_J) \in \hat{X}$$

Break Even-Analyse Mehrproduktfall ...

- Zweiproduktfall: Gerade

$$\hat{x}_1 \cdot d_1 + \hat{x}_2 \cdot d_2 = K^F + \underline{G} \Rightarrow \hat{x}_2 = \frac{K^F + \underline{G}}{d_2} - \frac{d_1}{d_2} \cdot \hat{x}_1$$

- Mehrproduktfall:
  Konvexkombination isolierter Break Even-Mengen

$$\hat{x}_j = (0, \ldots, \hat{x}_j^i, \ldots, 0) \qquad \hat{x}_j^i = \frac{K^F + \underline{G}}{d_j}$$

$$\hat{x} = \alpha_1 \cdot \hat{x}_1 + \alpha_2 \cdot \hat{x}_2 + \cdots + \alpha_J \cdot \hat{x}_J = \sum_{j=1}^{J} \alpha_j \cdot \hat{x}_j$$

$$\alpha_j \geq 0 \;\; \forall j; \;\; \sum_{j=1}^{J} \alpha_j = 1$$

Break Even-Analyse: Mehrproduktfall Beispiel

- $J = 4$ Produktarten

  Deckungsbeiträge: $d_1 = 20$; $d_2 = 70$; $d_3 = 60$; $d_4 = 150$

  Fixkosten = 150.000

  Mindestgewinn = 60.000

Break Even-Mengen $\hat{x}_1^i = 10.500; \hat{x}_2^i = 3.000; \hat{x}_3^i = 3.500; \hat{x}_4^i = 1.400$

Beliebiger Break Even-Vektor

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \\ \hat{x}_4 \end{bmatrix} = \alpha_1 \cdot \begin{bmatrix} 10.500 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 3.000 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_3 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3.500 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_4 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1.400 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \cdot 10.500 \\ \alpha_2 \cdot 3.000 \\ \alpha_3 \cdot 3.500 \\ \alpha_4 \cdot 1.400 \end{bmatrix}$$

Break Even-Analyse Mehrproduktfall ...

Konstanter Absatzmix

- Beliebiges Produkt als *Leitprodukt*
- Annahme konstanter Verhältnisse der Absatzmengen
  - Für erstes Produkt als Leitprodukt und β_j als konstante Verhältnisse der Absatzmengen der Produkte j zu Produkt 1

$$\beta_j = \frac{x_j}{x_1} \quad \textit{für} \quad j = 1, \ldots, J$$

$$D = \sum_{j=1}^{J} x_j \cdot d_j = \sum_{j=1}^{J} \left(x_1 \cdot \beta_j \right) \cdot d_j = x_1 \cdot \sum_{j=1}^{J} \beta_j \cdot d_j = x_1 \cdot \bar{d}$$

$$\hat{x}_1 = \frac{K^F + \underline{G}}{\bar{d}}$$

Break Even-Analyse: Mehrproduktfall
Break Even-Umsatz

Ermittlung des Break Even-Umsatzes bei konstantem Absatzmix

$$E = \sum_{j=1}^{J} x_j \cdot p_j = x_1 \cdot \sum_{j=1}^{J} \beta_j \cdot p_j = x_1 \cdot \bar{p}$$

$$\hat{E} = \bar{p} \cdot \hat{x}_1 = \frac{K^F + \underline{G}}{\bar{d} \,/\, \bar{p}}$$

Relation “Deckungsbeitrag zu Gesamtumsatz” für jedes Produkt gegeben und konstant

$$\frac{D_j}{E} = \frac{x_j \cdot d_j}{x_1 \cdot \bar{p}} = \frac{x_1 \cdot \left(\beta_j \cdot d_j\right)}{x_1 \cdot \bar{p}} = \frac{\beta_j \cdot d_j}{\bar{p}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\hat{E} = \frac{K^F + \underline{G}}{\sum_{j=1}^{J} \frac{D_j}{E}}}$$

Break Even-Analyse: Mehrproduktfall Beispiel

Mengenrelation 1 : 2 : 4 : 4

$$\bar{d} = 1 \cdot 20 + 2 \cdot 70 + 4 \cdot 60 + 4 \cdot 150 = 1.000$$

$$\hat{x}_1 = \frac{210.000}{1.000} = 210$$

$$\hat{x}_2 = 210 \cdot 2 = 420; \hat{x}_3 = 210 \cdot 4 = 840; \hat{x}_4 = 210 \cdot 4 = 840$$

Break Even-Analyse: Mehrproduktfall Beispiel ...

Mengenrelation 1 : 2 : 4 : 4

Gegeben seien folgende Preise

$$p_1 = 110;\ p_2 = 200;\ p_3 = 160;\ p_4 = 220$$

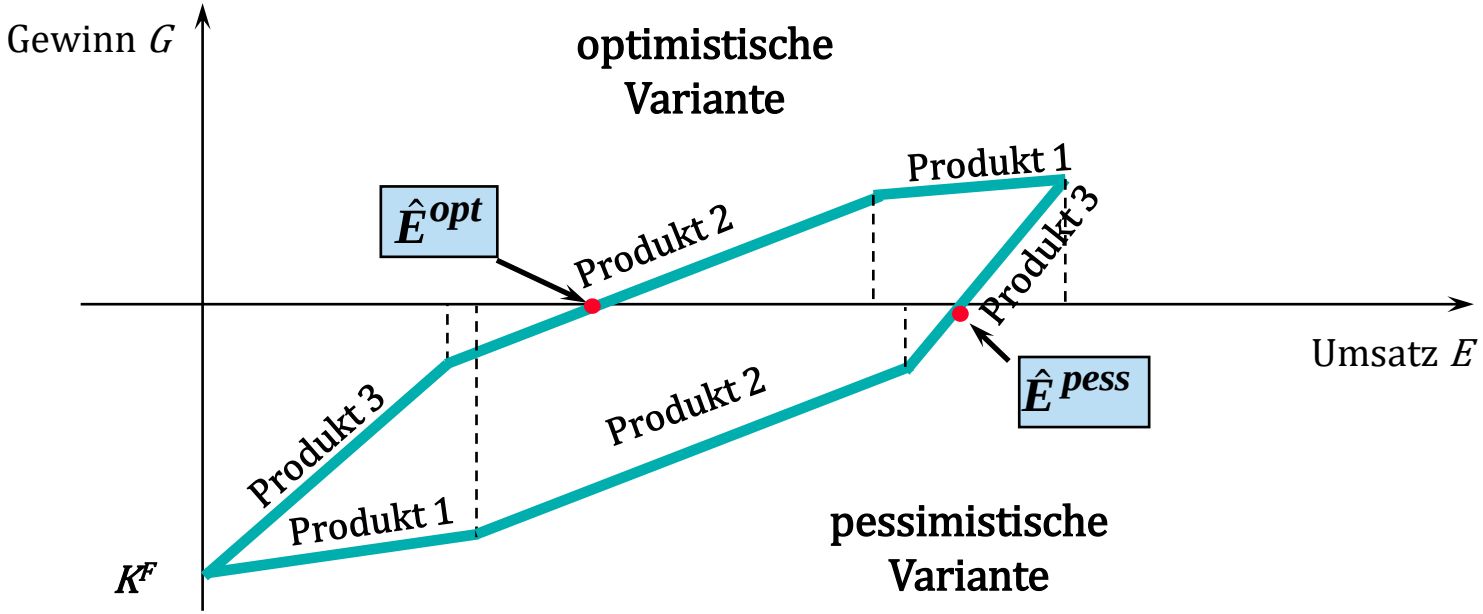
$$\bar{p} = 1 \cdot 110 + 2 \cdot 200 + 4 \cdot 160 + 4 \cdot 220 = 2.030$$

$$\frac{D_1}{E} = \frac{20}{2.030};\ \frac{D_2}{E} = \frac{140}{2.030};\ \frac{D_3}{E} = \frac{240}{2.030};\ \frac{D_4}{E} = \frac{600}{2.030}$$

$$\hat{E} = \frac{210.000}{\frac{1.000}{2.030}} = \frac{210.000 \cdot 2.030}{1.000} = 426.300$$

Pessimistische und optimistische Variante

- Pessimistische Variante
  - Individuelle Deckungsbeitrags-Umsatz-Relationen D_j/E_j in aufsteigender Reihenfolge, bis Absatzobergrenze erreicht ist
- Optimistische Variante
  - umgekehrt



Risikomaße
Sicherheitskoeffizient *SK*

- **Fragestellung**
  - Um welchen Prozentsatz darf Umsatz/Absatz (ausgehend von Basiswert) sinken, ohne in die Verlustzone zu geraten?
- **Überlegungen**
  - Je höher *SK*, desto sicherer positiver/bestimmter Periodenerfolg
  - Ausgangsmenge x: volle Kapazitätsauslastung

$$SK = \frac{p \cdot x - p \cdot \hat{x}}{p \cdot x} = \frac{x - \hat{x}}{x} = 1 - \frac{\hat{x}}{x}$$

Beispiel
Kapazität $x = 10.000$,
Break Even-Menge = 8.000

Sicherheitskoeffizient = 1 – 8.000/10.000 = **0,2**

Kapazitätsauslastung kann um 20% unterschritten werden, ehe man Verluste macht

Operating Leverage *OL*

- **Fragestellung**
  - Relative Gewinnänderung im Verhältnis zur relativen Umsatzänderung
  - Einfluss der Fixkosten ersichtlich
  - Definition ohne Berücksichtigung eines Mindestgewinns:

$$OL = \frac{\frac{\Delta G}{G}}{\frac{\Delta E}{E}} \qquad OL = \frac{\frac{\Delta x \cdot d}{\left(x \cdot d - K^F\right)}}{\frac{\Delta x \cdot p}{x \cdot p}}$$

- **Letztlich aber nur Umformung des Sicherheitskoeffizienten**

$$OL = \frac{\Delta x \cdot d \cdot x}{\Delta x \cdot \left(x \cdot d - K^F\right)} = \frac{x}{x - \frac{K^F}{d}} = \frac{1}{\frac{x - \hat{x}}{x}} = \frac{1}{SK}$$

Stochastische Break Even-Analyse
Einproduktfall

- Explizite Untersuchung der Wahrscheinlichkeitsverteilung des Gewinns
  - Verteilung der einzelnen Bestimmungsfaktoren
- Annahme risikobehafteter Absatzmengen
- Risiko als Wahrscheinlichkeit für Erfolgsniveau $\underline{G}$

$$E\left[\tilde{G}\right] = E\left[\tilde{x}\right] \cdot d - K^F$$

$$\Pr\left\{\tilde{G} \geq \underline{G}\right\}$$

Break Even-Wahrscheinlichkeit

$$\Pr\left\{\tilde{G} \geq 0\right\} \Leftrightarrow \Pr\left\{\tilde{x} \geq \hat{x}\right\}$$

Stochastische Break Even-Analyse
Beispiel

Absatzmengen x gleichverteilt im Intervall $\left[\underline{x}, \overline{x}\right]$

$$f(x) = \frac{1}{\overline{x} - \underline{x}} \qquad F(x) = \frac{x - \underline{x}}{\overline{x} - \underline{x}} \qquad x \in \left[\underline{x}, \overline{x}\right]$$

Break Even-Wahrscheinlichkeit $\quad \Pr\left\{\tilde{G} \geq 0\right\} = 1 - F\left(\hat{x}\right)$

$$\Pr\{\tilde{G} \geq 0\} = \begin{cases} 0 & \text{falls } \hat{x} \geq \overline{x} \\ \dfrac{\overline{x} - \hat{x}}{\overline{x} - \underline{x}} & \text{falls } \underline{x} < \hat{x} < \overline{x} \\ 1 & \text{falls } \hat{x} \leq \underline{x} \end{cases}$$

Stochastische Break Even-Analyse Beispiel ...

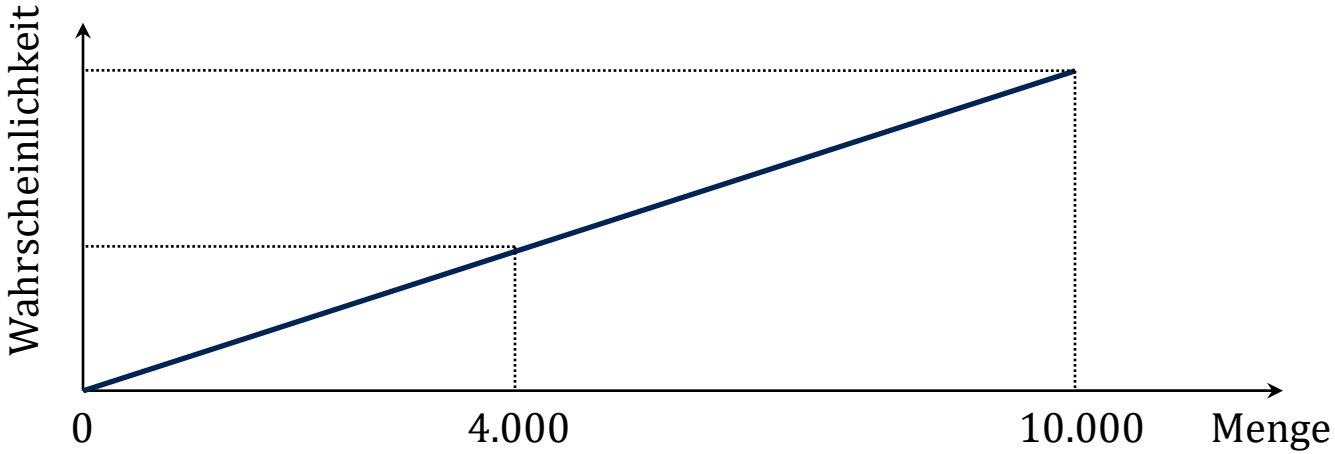
- Absatzmengen gleichverteilt in [0, 10.000]

  $F(x) = 0{,}0001 \cdot x$

  Deckungsbeitrag $d = 50$, Fixkosten $= 200.000$

  Break Even-Menge $= 4.000$

  $F(4.000) = 0{,}4$ und Break Even-Wahrscheinlichkeit $= 0{,}6$



Stochastische Break Even-Analyse
Weitere Fragestellung

- Fragestellung
  - Wie hoch ist der maximale Erfolg, der mit einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit überschritten wird?

$$\mathbf{Pr}\left\{\tilde{G} \geq \underline{G}\right\} = \overline{\mathbf{Pr}}$$

$$1 - F\left(\hat{x}\right) = \frac{\bar{x} - \hat{x}}{\bar{x} - \underline{x}} = \frac{\bar{x} - \dfrac{K^F + \underline{G}}{d}}{\bar{x} - \underline{x}} = \overline{\mathbf{Pr}}$$

$$\underline{G} = d \cdot \left(\bar{x} - \overline{\mathbf{Pr}} \cdot \left(\bar{x} - \underline{x}\right)\right) - K^F$$

Stochastische Break Even-Analyse
Beispiel

- Maximierung der Break Even-Wahrscheinlichkeit

  Annahmen: Absatzmengen gleichverteilt in [0, 10.000]

  Deckungsbeitrag = 40

  Fixkosten = 150.000

  Variante: Einstellung Verkaufspersonal mit Fixkosten = 90.000

  und Obergrenze Absatzmenge = 13.000

  Mindestgewinn = 200.000

- Ausgangssituation: erforderlicher Absatz = 8.750; Wahrscheinlichkeit 0,125

  Variante: erforderlicher Absatz = 11.000

  Wahrscheinlichkeit = 1 - 11.000/13.000 = 0,1538

Einstellung daher vorteilhaft

Stochastische Break Even-Analyse Beispiel ...

- Fragestellung:
  Ergebnismaximierung bei vorgegebener Wahrscheinlichkeit

  Vorgegebene Wahrscheinlichkeit = 0,4

- Ausgangssituation

  $\underline{G} = 40 \cdot [10.000 - 0{,}4 \cdot (10.000 - 0)] - 150.000 = 90.000$

  Variante

  $\underline{G} = 40 \cdot [13.000 - 0{,}4 \cdot (13.000 - 0)] - 240.000 = 72.000$

  Einstellung zusätzlichen Verkaufspersonals unvorteilhaft

Simulationsverfahren

1. Auswahl als unsicher betrachteter Parameter (*P*)

2. Schätzung isolierter Wahrscheinlichkeiten für jeden *P*

3. Ermittlung der Ausgangsgrößen für Simulationslauf
- Zufallszahlen für jeden *P* gleichverteilt in [0, 1]
- Transformation in konkreten Parameterwert
- Berücksichtigung stochastischer Abhängigkeiten durch sukzessives Vorgehen

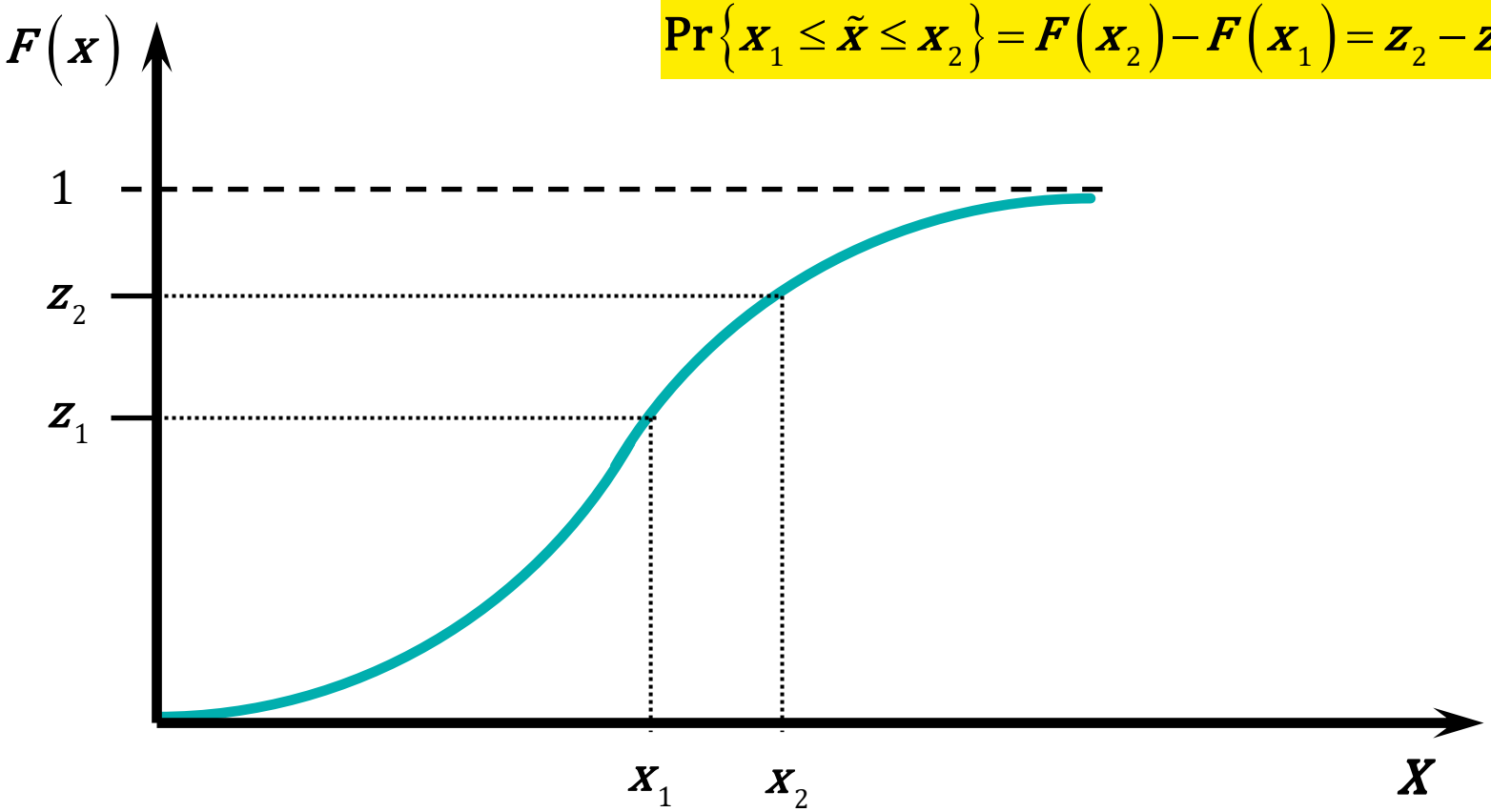
4. Berechnung der Zielgröße

5. Häufige Wiederholung von 3. und 4. (z.B. 10.000 mal)

6. Ermittlung der Verteilungsfunktion der Zielgröße aus relativen Häufigkeiten

Transformation von Zufallszahlen

$$\Pr\left\{x_1 \le \tilde{x} \le x_2\right\} = F\left(x_2\right) - F\left(x_1\right) = z_2 - z_1$$



$$x_1 = F^{-1}\left(z_1\right) \qquad x_2 = F^{-1}\left(z_2\right)$$

Value-at-Risk und Cash-Flow-at-Risk

- Risikomaße im praktischen Risikomanagement
- Value-at-Risk (VaR)
  - *Downside*-Risikomaß

$$\Pr\left\{\Delta W \geq VaR\right\} = \overline{\Pr}$$

  - Probleme bei Anwendung im Nichtbankenbereich

- Cash-Flow-at-Risk (CFaR)
  - Berücksichtigt Besonderheiten im Nichtbankenbereich

$$\Pr\left\{CF \geq CFaR\right\} = \overline{\Pr}$$

Verfahrenswahl bei Unsicherheit

- Varianz der Absatzmengen: 150
- Absatzpreis: 10

Verfahren 1: $K_1^F = 1.000; \quad k_1 = 8; \quad \Rightarrow \quad d_1 = 2; \quad \hat{x}_1 = \frac{1.000}{2} = 500$

Verfahren 2: $K_2^F = 2.000; \quad k_2 = 6; \quad \Rightarrow \quad d_2 = 4; \quad \hat{x}_2 = \frac{2.000}{4} = 500$

Gleiche Werte für *SK* und *OL*

Gewinnvarianzen

Verfahren 1: $\sigma^2\left(\tilde{G}_1\right) = \sigma^2\left(\tilde{x}\right) \cdot d_1^2 = 150 \cdot 2^2 = 150 \cdot 4 = 600$

Verfahren 2: $\sigma^2\left(\tilde{G}_2\right) = \sigma^2\left(\tilde{x}\right) \cdot d_2^2 = 150 \cdot 4^2 = 150 \cdot 16 = 2.400$

Beurteilung von *SK* und *OL*

- Problem: Keine Berücksichtigung der Verteilungen bei *SK* und *OL*

Darstellung am Beispiel der Gewinnvarianz

$$\sigma^2\left(\tilde{G}\right)=\sigma^2\left(\tilde{x}\cdot d-K^F\right)=\sigma^2\left(\tilde{x}\cdot d\right)=\sigma^2\left(\tilde{x}\right)\cdot d^2=\sigma^2\left(\tilde{x}\right)\cdot\left(p-k\right)^2$$

Wirkungen

Tatsächlich

- Niedrigere Stückkosten führen zu höherem Deckungsbeitrag und höherer Varianz des Gewinns
- Fixkosten haben keine Auswirkung auf die Varianz

Kennzahlen

- Niedrigere Stückkosten führen zu höherem Deckungsbeitrag, zu geringerer BEM und zu höherem *SK* und niedrigerem *OL*
- Höhere Fixkosten führen zu größerem *OL*

Vergleich mit dem Variationskoeffizienten *VK*

$$VK = \frac{\sigma\left(\tilde{G}\right)}{\mathrm{E}\left[\tilde{G}\right]} = \frac{\sigma\left(\tilde{x}\right)\cdot d}{\mathrm{E}\left[\tilde{x}\right]\cdot d - K^F} = \frac{\sigma\left(\tilde{x}\right)}{\mathrm{E}\left[\tilde{x}\right] - \hat{x}}$$

Hier gilt: $\frac{\partial VK}{\partial K^F} > 0$ $\frac{\partial VK}{\partial d} < 0$

Diese Beziehungen sind analog zu denjenigen bei *SK* und *OL*

Verfahrenswahl bei Risikoaversion

- Entscheidungsträger ist risikoscheu
- Nutzenfunktion: $U(G) = -e^{-\alpha \cdot G}$
- Sicherheitsäquivalent: $CE = (p - c) \cdot \mathrm{E}[x] - K^F - \frac{\alpha}{2} \cdot d^2 \cdot \sigma^2$

$$\mathrm{E}[U(G)] = \mathrm{E}[U(d \cdot x - K^F)] = U\left[\mathrm{E}[d \cdot x - K^F] - \frac{\alpha}{2} \cdot d^2 \cdot \sigma^2\right] = U(CE)$$

Beispiel

- Risikoaversion des Entscheidungsträgers wirkt sich auf die Break Even-Mengen der Verfahren aus
- Bei $r = 0{,}5$ ergeben sich für die Risikoprämien und Break Even-Mengen:

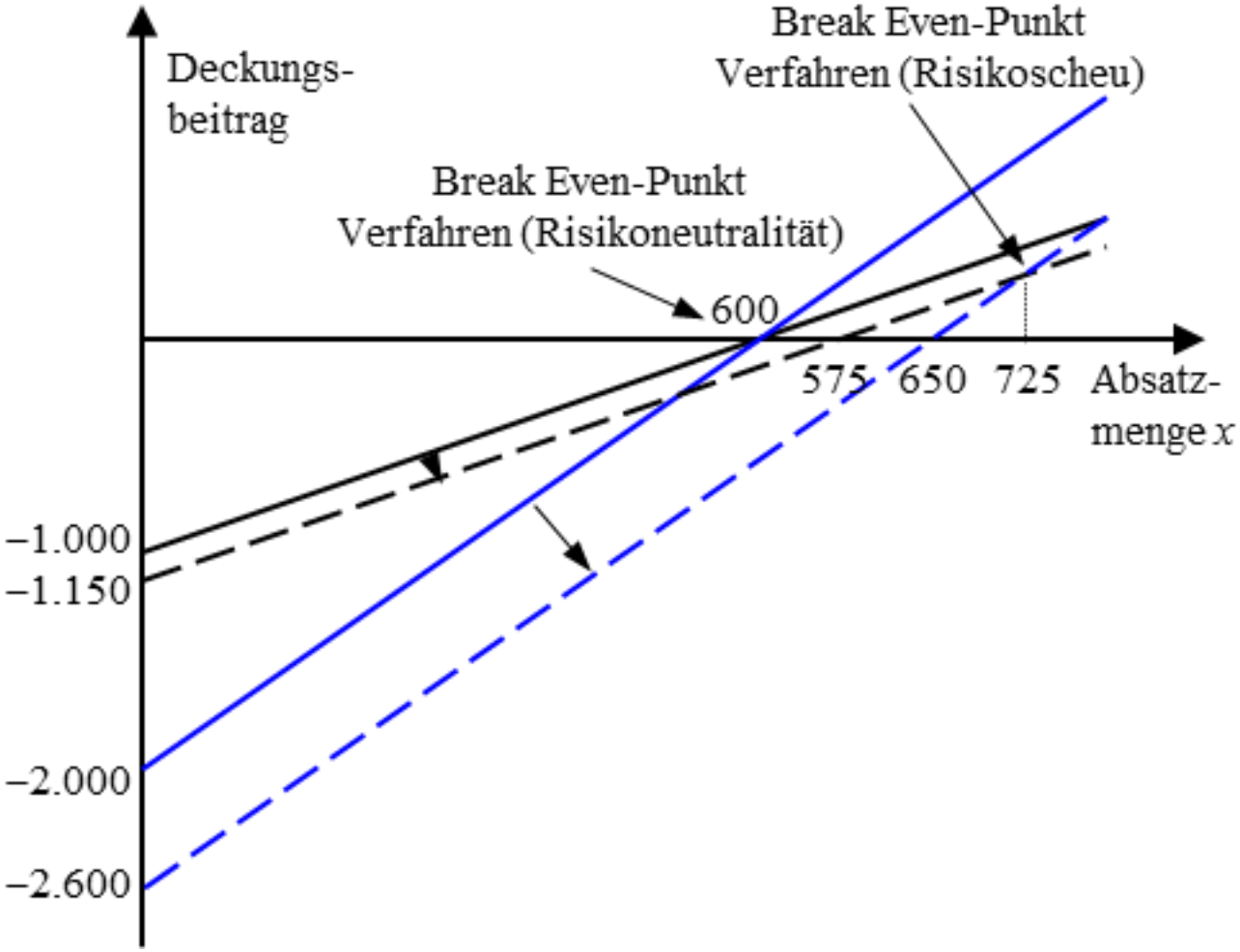
$$\frac{\alpha}{2} \cdot d_1^2 \cdot \sigma_1^2 = \frac{4 \cdot 150}{4} = 150 \quad \Rightarrow \quad \hat{x}_1 = \frac{1.150}{2} = 575$$

$$\frac{\alpha}{2} \cdot d_2^2 \cdot \sigma_2^2 = \frac{16 \cdot 150}{4} = 600 \quad \Rightarrow \quad \hat{x}_1 = \frac{2.600}{2} = 650$$

- Break Even-Punkt: $$\hat{x}_{12} = \frac{K_2^F - K_1^F}{k_2 - k_1} + \frac{\alpha}{2} \cdot \sigma^2 \cdot (d_1 + d_2)$$

$(d_1 + d_2) > 0$ => Break Even Punkt bei Risikoaversion höher als bei Risikoneutralität

Verfahrenswahl bei Risikoaversion – Break Even-Punkt



Break Even-Analyse
Ergebnis

- BEA vermittelt Gefühl für Bedeutung von Unsicherheit
- BEA als wichtige Signalfunktion
  insbesondere für mehr Informationsbeschaffungen bzw. Planungsansätze unter expliziter Einbeziehung von Wahrscheinlichkeitsverteilungen
- Keine konkrete Handlungsempfehlung
- Erfordernis expliziter Analyse der Konsequenzen verschiedener Problemstrukturen für die Unternehmenspolitik

Programmplanung bei Risiko

- Untersuchung der Implikationen expliziter Risikoberücksichtigung in der Produktionsprogrammplanung
  - Bestehen Unterschiede in der Lösungsstruktur?

- Was ist risikobehaftet?
  - Risikobehaftete Beschaffungs- oder Absatzpreise (Deckungsbeitrag)
    Risikobehaftete Fixkosten

$$\tilde{G} = \sum_{j=1}^{J} x_j \cdot \left(\tilde{p}_j - \tilde{k}_j\right) - \tilde{K}^F = \sum_{j=1}^{J} x_j \cdot \tilde{d}_j - \tilde{K}^F = \tilde{D} - \tilde{K}^F$$

- Annahmen im Folgenden
  - *Eine* Mehrproduktrestriktion, die nicht risikobehaftet ist
  - Gesamtes Produktionsprogramm wird im Voraus festgelegt

Programmplanung bei Risiko
Annahmen und Vorgehen

- Wichtige Eigenschaft: Lösungsstruktur hängt vom Entscheidungskontext und Präferenzsystem ab

- Szenarien
  - Beschränkung auf institutionales Unternehmen ohne Kapitalmarkt: **Erwartungsnutzenmaximierung**
  - Produktionsprogramm direkt am Kapitalmarkt handelbar: **Marktwertmaximierung**

Erwartungsnutzenmaximierung (1)

- Zielgröße
  Subjektive Bewertung des Risikos durch einzelnen Entscheidungsträger
- Bernoulli-Prinzip: Erwartungs*nutzen*maximierung
  - Subjektive Nutzenfunktion U für jeden Entscheidungsträger
  - Ergebnisgröße ω: Endvermögen der Planungsperiode

Endvermögen ω = gegebenes Anfangsvermögen ω_0 + Periodengewinn

Gewählte Alternative ist jene mit dem größten Nutzenerwartungswert

$$\tilde{\omega} = \omega_0 + \tilde{G} = \omega_0 + \tilde{D} - \tilde{K}^F$$

$$\mathrm{E}\left[U\left(\tilde{\omega}\right)\right] = \mathrm{E}\left[U\left(\omega_0 + \tilde{D} - \tilde{K}^F\right)\right] = \mathrm{E}\left[U\left(\omega_0 + \sum_{j=1}^{J} x_j \cdot \tilde{d}_j - \tilde{K}^F\right)\right]$$

Erwartungsnutzenmaximierung (2)

- **Spezialfall Risikoneutralität**
  - Nutzenfunktion U linear: $U(\omega) = \alpha + \beta \cdot \omega$ mit $\beta > 0$
  - Entscheider ist risikoneutral

Gesucht
Produktionsprogramm mit maximalem (Perioden-)Gewinnerwartungswert

$$\mathrm{E}\left[U\left(\tilde{\omega}\right)\right] = \mathrm{E}\left[\alpha + \beta \cdot \tilde{\omega}\right] = \alpha + \beta \cdot \left(\omega_0 + \mathrm{E}\left[\tilde{G}\right]\right)$$

$$\mathrm{E}\left[\tilde{G}\right] = \mathrm{E}\left[\tilde{D} - \tilde{K}^F\right] = \mathrm{E}\left[\sum_{j=1}^{J} x_j \cdot \tilde{d}_j - \tilde{K}^F\right] = \sum_{j=1}^{J} x_j \cdot \mathrm{E}\left[\tilde{d}_j\right] - \mathrm{E}\left[\tilde{K}^F\right]$$

→ Reihung nach dem höchsten erwarteten spezifischen DB
Fixkosten sind irrelevant

Beispiel

Produkt	1	2
DB	je zu 50 % 10 oder 20	14
Stunden/St	5	5
Erwarteter DB	15	14

Kapazität: 1.400 Stunden

Ausschließliche Produktion von Produkt 1
$1.400/5 = 280$ Stück
Erwarteter DB: 4.200

Erwartungsnutzenmaximierung (3)

- **Allgemeinerer Fall: Risikoscheu**
  - Streng konkave Nutzenfunktion U
  - $U(\omega) > 0;\ \ U'(\omega) < 0$

  - Programmplanung als nichtlineares Optimierungsproblem
  - Bedeutung des erwarteten spezifischen DB nimmt ab
  - Es kommt zu Diversifikationseffekten
  - Maximierung des Erwartungs*nutzens* führt zu optimalem Produktprogramm-Portefeuille

Beispiel

Produkt	1	2
DB	je zu 50 % 10 oder 20	14
Stunden/St	5	5

Kapazität: 1.400 Stunden
Nutzenfunktion logarithmisch; $\omega > 0$

$$U(\omega) = 2\ln(\omega);\ U'(\omega) = \frac{2}{\omega} > 0;\ U''(\omega) = -\frac{2}{\omega^2} < 0$$

Annahmen: $\omega_0 = 0$ und Fixkosten $= 0$

$$LG = \ln(10 \cdot x_1 + 14 \cdot x_2) + \ln(20 \cdot x_1 + 14 \cdot x_2) - \lambda \cdot (5 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 - 1.400)$$

Kuhn/Tucker-Bedingungen:

$$x_j^* > 0 \quad und \quad \frac{\partial LG}{\partial x_i} = 0 \quad j = 1,2$$

$$x_j^* = 0 \quad und \quad \frac{\partial LG}{\partial x_j} \leq 0 \quad j = 1,2$$

Beispiel ...

- Frage: Sind beide Produkte im optimalen Programm?

Wird nur Produkt 1 gefertigt, darf an Stelle (280, 0) die Ableitung von LG nach x_2 nicht positiv sein

$$\frac{\partial LG\left(x_1 = 280; x_2 = 0\right)}{\partial x_2} = \frac{14}{2.800} + \frac{14}{5.600} - \lambda \cdot 5$$

$$\frac{\partial LG\left(x_1 = 280; x_2 = 0\right)}{\partial x_1} = \frac{10}{2.800} + \frac{20}{5.600} - \lambda \cdot 5 = 0 \Rightarrow \lambda = 0{,}00143$$

Setzt man diesen Wert für λ in die obige Ableitung ein, ergibt sich eine positive Differenz von 0,00035

⇨Produkt 2 ist Bestandteil des optimalen Produktionsprogramms

Ähnliche Vorgehensweise zeigt, dass auch Produkt 1 im optimalen Produktionsprogramm enthalten ist

Beispiel ...

- **Ermittlung des optimalen Produktionsprogramms**
  - Restriktion als Gleichung nach Produkt 2 auflösen

$$\ln\left(10\cdot x_1+14\cdot\left(280-x_1\right)\right)+\ln\left(20\cdot x_1+14\cdot\left(280-x_1\right)\right)=$$

$$\ln\left(3.920-4\cdot x_1\right)+\ln\left(3.920+6\cdot x_1\right)$$

  - Nullsetzen der 1. Ableitung

$$-\frac{4}{3.920-4\cdot x_1^*}+\frac{6}{3.920+6\cdot x_1^*}=0 \quad\Rightarrow\quad 3.920=24\cdot x_1^*$$

$$\Rightarrow x_1^*=\frac{3.920}{24}=163,\overline{3} \qquad x_2^*=280-163,\overline{3}=116,\overline{6}$$

Erwartungsnutzenmaximierung (4)

- Entscheidungsrelevanz von Fixkosten
  abhängig vom Verlauf der Risikoaversion

- Maß der Risikoscheu:
  Absolute Risikoaversion $AR(\omega)$

$$AR(\omega) = -\frac{U''(\omega)}{U'(\omega)}$$

Beispiel: Logarithmische Nutzenfunktion

$$AR(\omega) = \frac{\frac{1}{\omega^2}}{\frac{1}{\omega}} = \frac{\omega}{\omega^2} = \frac{1}{\omega}$$

- Absolute Risikoaversion nimmt – gegeben ein Anfangsvermögen – ab
- Höhere Fixkosten induzieren niedrigeres Endvermögensniveau
- Wahrscheinlichkeitsverteilung für Produktionsprogramm wird in einen Bereich der Nutzenfunktion mit stärkerer Risikoscheu verschoben

Beispiel ...

- Positives Anfangsvermögen ω_0 positive, sichere Fixkosten K^F

- Zielfunktion

$$\ln\left(\omega_0 + 3.920 - 4 \cdot x_1 - K^F\right) + \ln\left(\omega_0 + 3.920 + 6 \cdot x_1 - K^F\right)$$

$$3.920 + \omega_0 - K^F = 24 \cdot x_1^*$$

$$\Rightarrow x_1^* = \frac{3.920 + \omega_0 - K^F}{24}; x_2^* = 280 - \frac{3.920 + \omega_0 - K^F}{24}$$

Fixkosten über 3.920 + ω_0: nur Produkt 2
Anfangsvermögen über 2.800 + K^F: nur Produkt 1

Erwartungsnutzenmaximierung (5)

- Spezialfall: Konstante absolute Risikoaversion
  - (sichere) Fixkosten und sicheres Anfangsvermögen wieder bedeutungslos

- Beispiel: Exponentielle Nutzenfunktion

$$U(\omega) = -\frac{1}{\alpha} \cdot e^{-\alpha \cdot \omega} \quad (\alpha > 0)$$

$$AR(\omega) = -\frac{U''(\omega)}{U'(\omega)} = \frac{\alpha \cdot e^{-\alpha \cdot \omega}}{e^{-\alpha \cdot \omega}} = \alpha$$

$$U(D+\delta) = -\frac{1}{\alpha} \cdot e^{-\alpha \cdot (D+\delta)} = -\frac{1}{\alpha} \cdot e^{-\alpha \cdot D} \cdot e^{-\alpha \cdot \delta} = -\alpha \cdot U(\delta) \cdot U(D)$$

$$\mathrm{E}\left[U(\tilde{D}+\delta)\right] = -\alpha \cdot U(\delta) \cdot \mathrm{E}\left[U(\tilde{D})\right]$$

Wegen $U(\delta) < 0$ ist $-\alpha U(\delta)$ positiv
Mit $\delta = \omega_0 - K^F$ wird Irrelevanz von K^F und Anfangsvermögen deutlich

Erwartungsnutzenmaximierung (6)

- Stochastische Fixkosten
  - Potentielle Relevanz der Fixkosten wird verstärkt
  - Zusätzliche Diversifikationsaspekte hinsichtlich risikobehafteter Fixkosten
  - Auch bei konstanter absoluter Risikoaversion grundsätzliche Relevanz stochastischer Fixkosten

Annahme: Exponentielle Nutzenfunktion
und $\delta = \omega_0 - K^F$

$$\mathrm{E}\left[U\left(\tilde{\omega}\right)\right] = \alpha^2 \cdot \mathrm{E}\left[U\left(\omega_0\right) \cdot U\left(-\tilde{K}^F\right) \cdot U\left(\tilde{D}\right)\right] =$$

$$= \left(-\alpha \cdot U\left(\omega_0\right)\right) \cdot \left(-\alpha \cdot \mathrm{E}\left[U\left(-\tilde{K}^F\right) \cdot U\left(\tilde{D}\right)\right]\right) =$$

$$= \left(-\alpha \cdot U\left(\omega_0\right)\right) \cdot \left(-\alpha \cdot \left\{\mathrm{E}\left[U\left(-\tilde{K}^F\right)\right] \cdot \mathrm{E}\left[U\left(\tilde{D}\right)\right] + \mathrm{Cov}\left(U\left(-\tilde{K}^F\right), U\left(\tilde{D}\right)\right)\right\}\right)$$

Erwartungsnutzenmaximierung (7)

- Keine Fixkostenrelevanz nur dann,
  wenn Fixkosten mit DB völlig unkorreliert sind
- Stochastische Fixkosten alleine induzieren keine Fixkostenrelevanz
  - Deckungsbeiträge sind dann sicher

$$\tilde{G} = D - \tilde{K}^F$$

⇨ Zustandsabhängiges Endvermögen für jeden Zustand maximal bei Programm mit maximalem Deckungsbeitrag

⇨ Dominanzprinzip
Man kann sich auf die bekannten Sicherheitsansätze beschränken, falls die Fixkosten die alleinige risikobehaftete Größe sind

Erwartungsnutzenmaximierung (8) Zusammenfassung

- **Relevanz von Fixkosten**
  - Fixkosten sind
    - *irrelevant*, falls Nutzenfunktion mit konstanter absoluter Risikoaversion und Fixkosten sicher
    - *irrelevant*, falls Fixkosten die alleinige stochastische Größe
    - regelmäßig auch als sichere Größe *relevant*, falls Nutzenfunktion ohne konstante absolute Risikoaversion
    - *grundsätzlich relevant*, falls neben Deckungsbeiträgen auch Fixkosten risikobehaftet und keine lineare Nutzenfunktion (Risikoneutralität)
- **Relevanz des Anfangsvermögens**
  - obige Ergebnisse gelten analog
  - Anfangsvermögen am Periodenbeginn aber sicher -- insofern muss diesbezüglich keine Unsicherheit beachtet werden

Erwartungsnutzenmaximierung (9) Implikationen

- Begründung der Verwendung von Vollkostenrechnungen
  - Streng genommen nur Vollkostenrechnungen als Periodenrechnungen
- Fixkosten relevant wegen Einflusses auf Bewertung der Gewinnverteilungen
  - Fixkosten nach wie vor unabhängig von den Entscheidungsvariablen
- Faktisch nichtlineares Entscheidungsproblem
  - Risikobehaftetes Endvermögen ist das Argument einer Nutzenfunktion, deren Erwartungswert zu maximieren ist

- Problem: Bestimmung der Nutzenfunktion
  - Was ist der Nutzen des Endvermögens der betrachteten Periode? Probleme mit Ausschüttungen, Effekte von Folgeentscheidungen, Bewertungsinterdependenzen

Marktwertmaximierung

- Marktwertmaximierung als Ziel, wenn Anteile am Produktionsprogramm am Kapitalmarkt gehandelt werden
  - Entspricht Unternehmenswertmaximierung (Shareholder Value-Maximierung), typisch für börsennotierte Unternehmen
- **Handelbarkeit des Produktionsprogramms bedingt Entlastung des Produktionsprogramms von Diversifikationsaufgabe**
  - Unternehmen maximiert virtuellen Marktwert
  - Basis sind Marktwerte der Stückdeckungsbeiträge
- **Annahmen über den Markt**
  - Spanning: Unternehmen kann durch eigene Entscheidungen keine “völlig neue” Rückflussstruktur schaffen. Die bestehenden Finanztitel am Kapitalmarkt spannen einen Vektorraum auf, der durch Investitions- und Produktionsentscheidungen eines betrachteten Unternehmens nicht verändert wird.
  - Competitivity: Bewertungssystem am Kapitalmarkt wird durch Entscheidungen eines Unternehmens nicht verändert. Entspricht der Annahme eines konstanten Zinssatzes im Rahmen der Kapitalwertmaximierung bei sicheren Erwartungen

Marktwertmaximierung
Illustration

- Planungszeitraum von T Perioden
- Zahlungsüberschüsse $\ddot{U}$ am Periodenende risikobehaftet durch Zustände $\theta(t)$
- Zustandsraum für Periode t ... $\Theta(t)$
- Für jeden Zustand positiver Bewertungsfaktor $R(\theta(t))$
  - Marktwert genau einer anfallenden Geldeinheit aus Sicht $t = 0$
- Marktwert W zu $t = 0$

$$W = \sum_{t=1}^{T} \sum_{\theta(t) \in \Theta(t)} \ddot{U}\left(\theta(t)\right) \cdot R\left(\theta(t)\right)$$

- Bewertungsfaktoren $R(\theta(t))$ beinhalten
  - Zeit- und Risikopräferenzen der Kapitalmarktteilnehmer
  - Erwartungen der Kapitalmarktteilnehmer
  - Zinssatz i für sichere Anlagen
    Marktwert einer in t = 1 mit Sicherheit erzielten Geldeinheit

$$\frac{1}{1+i_1} = \sum_{\theta(1) \in \Theta(1)} R\left(\theta(1)\right)$$