Kapitel 2

Produktions-programm-entscheidungen

Ziele

- Darstellung der Lösungsverfahren für die Planung des optimalen kurzfristigen Produktionsprogramms mit und ohne Kapazitätsrestriktionen
- Analyse des Einflusses von Fixkosten auf die optimale Entscheidung
- Verstehen des Inhalts und des Nutzens von verschiedenen Opportunitätskosten-Konzepten

Das Szenario

Kurzfristig wirksame Entscheidungssituation

- Gegebener Bestand an Potentialfaktoren
- Keine zeitlichen Interdependenzen im Erlös-, Kosten- und Restriktionsbereich
- Nur monetäre Zielgrößen
- Ausschluss von Lagerhaltung
- Sichere Erwartungen

Fragestellung:

Welche Produkte sollen in welchen Mengen mit welchen der vorhandenen Fertigungsverfahren hergestellt und abgesetzt werden?

Vollkosten oder Teilkosten?

Zerlegung des Gesamtproblems nach der Fristigkeit

a^V: Aktion (Kombination variabler Aktionsparameter)

$A^V\left(\bar{a}^F\right)$: Aktionsraum

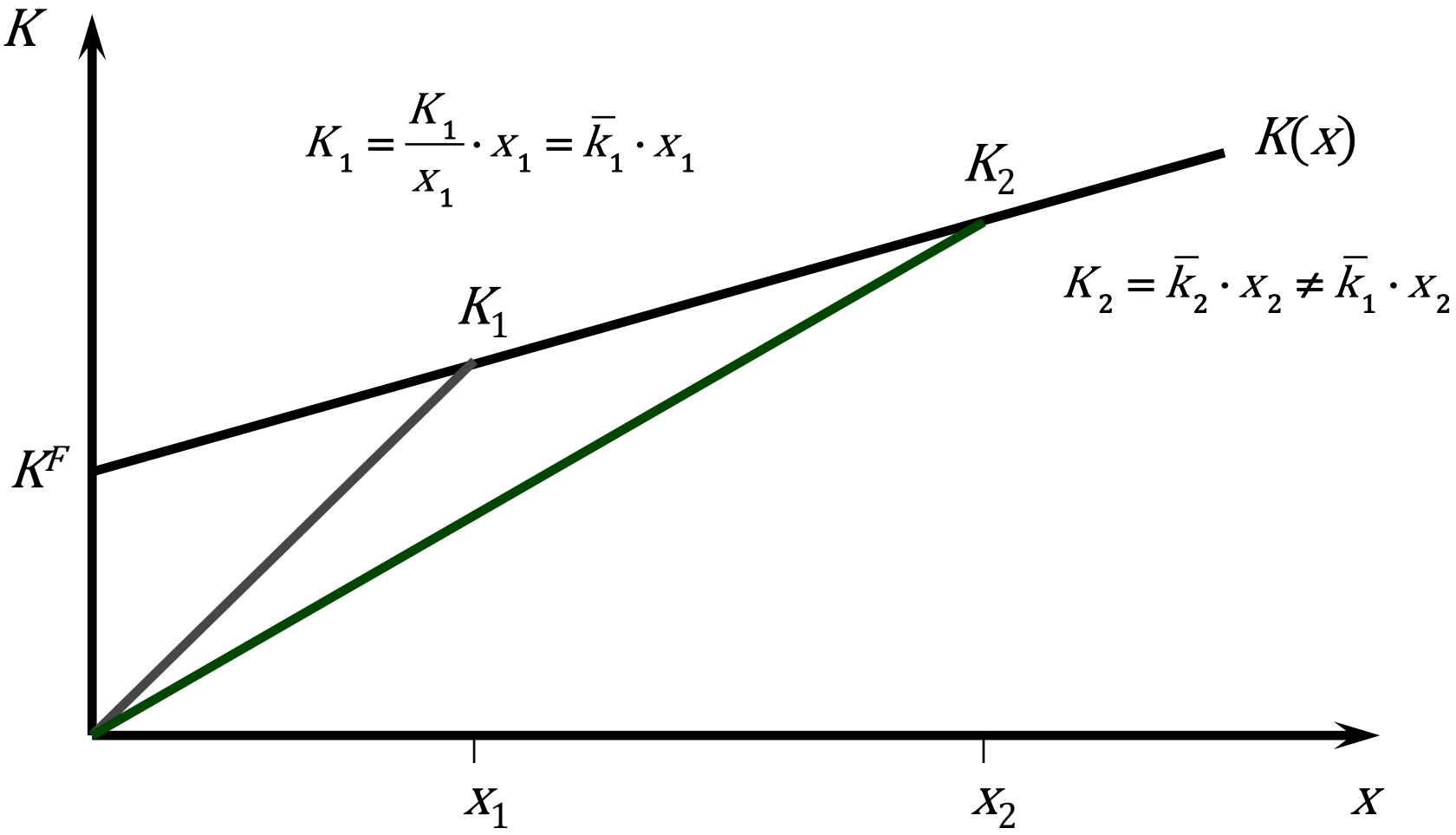
$$\max_{a^V} \quad G\left(a^V, \bar{a}^F\right) \qquad mit \quad a^V \in A^V\left(\bar{a}^F\right)$$

$$\max_{a^V} \quad G^V\left(a^V \middle| \bar{a}^F\right) + G^F\left(\bar{a}^F\right) \qquad mit \quad a^V \in A^V\left(\bar{a}^F\right)$$

Verwendung nur variabler Komponenten ist hinreichend
(nicht notwendig)

Fehlerpotential dann, wenn als reine Stückrechnung durchgeführt

Grafische Verdeutlichung



Restriktionstypen

- **Inhaltliche Ausrichtung**
  - Beschaffung
  - Produktion
  - Absatz (etc.)
- **Gleichungen oder Ungleichungen**
- **Grundsätzlich auch in nichtlinearer Form möglich**
- **Wichtige Differenzierung nach der Wirksamkeit** von
  - Einproduktrestriktionen
  - Mehrproduktrestriktionen

“Reine” Programmplanung auf Basis der einstufigen DB-Rechnung

Gegebene Verfahren bei technisch unverbundenen Prozessen

$$\max_{x_j} \; G\left(x_1,\ldots,x_J\right) = D\left(x_1,\ldots,x_J\right) - K^F = \sum_{j=1}^{J} x_j \cdot d_j - K^F$$

Unter den Nebenbedingungen:

$$\sum_{j=1}^{J} v_{ij} \cdot x_j \le \bar{V}_i \qquad i = 1,\ldots,I$$

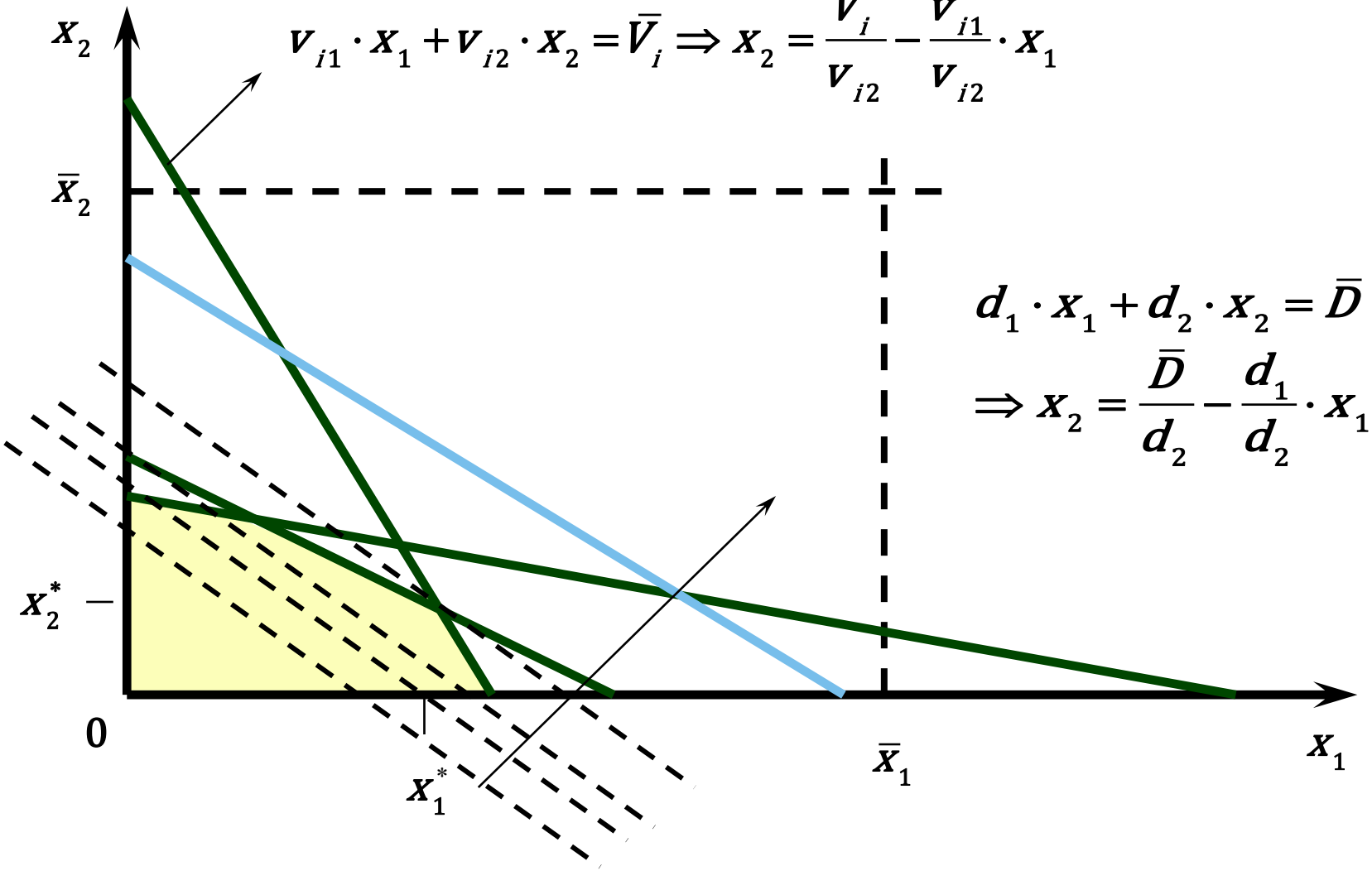
$$0 \le x_j \le \bar{x}_j \qquad j = 1,\ldots,J$$

Grafische Verdeutlichung
- Zwei Produkte -

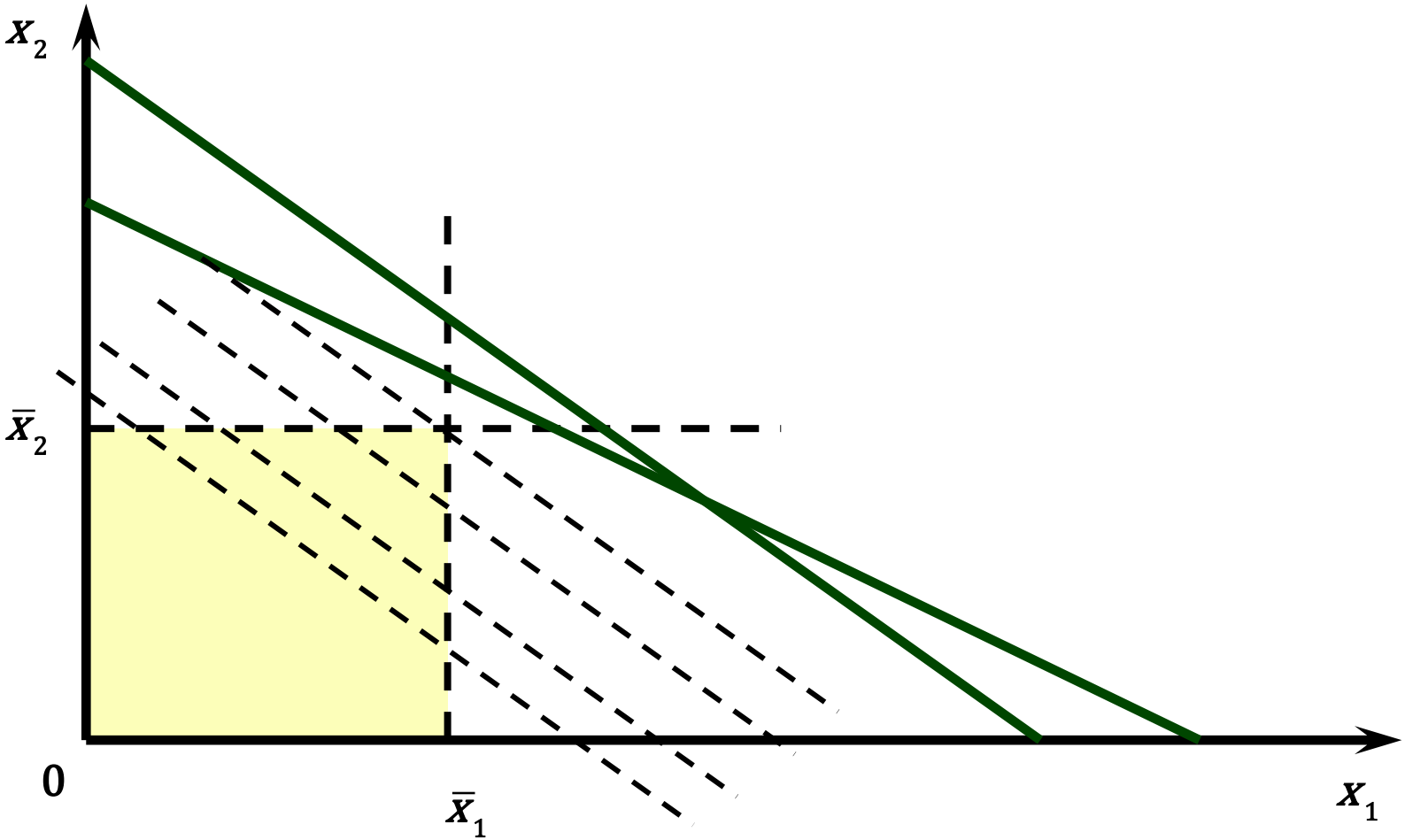
$$v_{i1} \cdot x_1 + v_{i2} \cdot x_2 = \bar{V}_i \Rightarrow x_2 = \frac{\bar{V}_i}{v_{i2}} - \frac{v_{i1}}{v_{i2}} \cdot x_1$$

$$d_1 \cdot x_1 + d_2 \cdot x_2 = \bar{D}$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{\bar{D}}{d_2} - \frac{d_1}{d_2} \cdot x_1$$



Keine wirksame Mehrproduktrestriktion (Grafik)



Keine wirksame Mehrproduktrestriktion (Procedere)

- Identifizierung aller Produkte mit $d_j > 0$
- Die jeweiligen Mengen werden auf die zugehörigen Absatzobergrenzen gesetzt
- Falls keine Mehrproduktrestriktion bindet, hat man das optimale Programm gefunden

"Ausgangslösung"

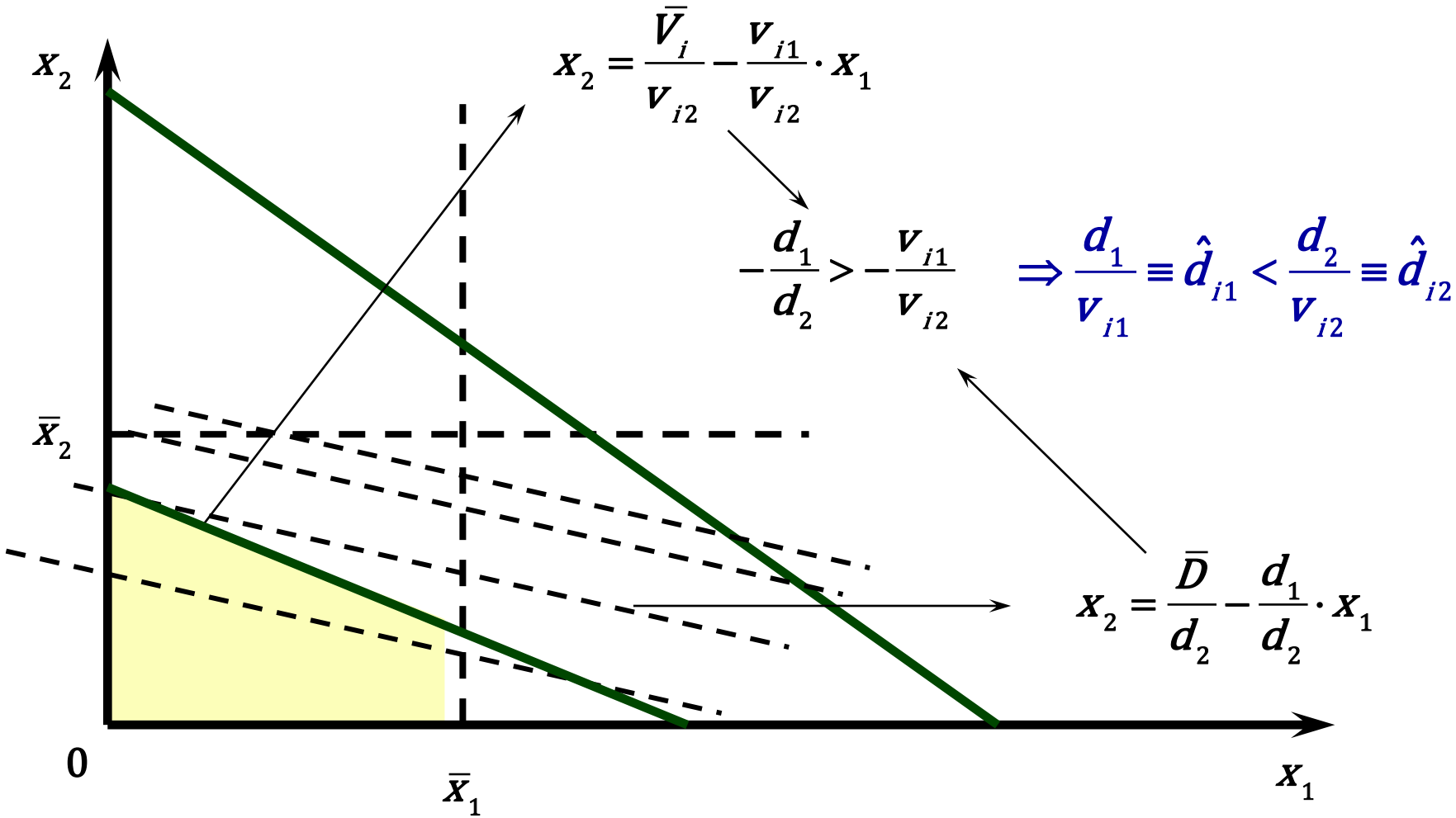
$$\boldsymbol{Falls\ d_j > 0\ ist\ x_j^* = \overline{x}_j, andernfalls\ ist\ x_j^* = 0}$$

Beispiel – Ausgangszahlen

Produkt	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$
Preis p_j	200	480	1.100
variable Kosten k_j	160	400	1.170
Deckungsbeitrag d_j	40	80	–70
Obergrenze $\overline{x}_j$	300	200	600
Verbrauch v_{1j}	2	8	5
Verbrauch v_{2j}	9	4	1
Aggregat	$i = 1$	$i = 2$	
Kapazität $\overline{V}_i$	2.500	3.700	

$$K^F = 4.000$$

Eine wirksame Mehrproduktrestriktion (Grafik A)

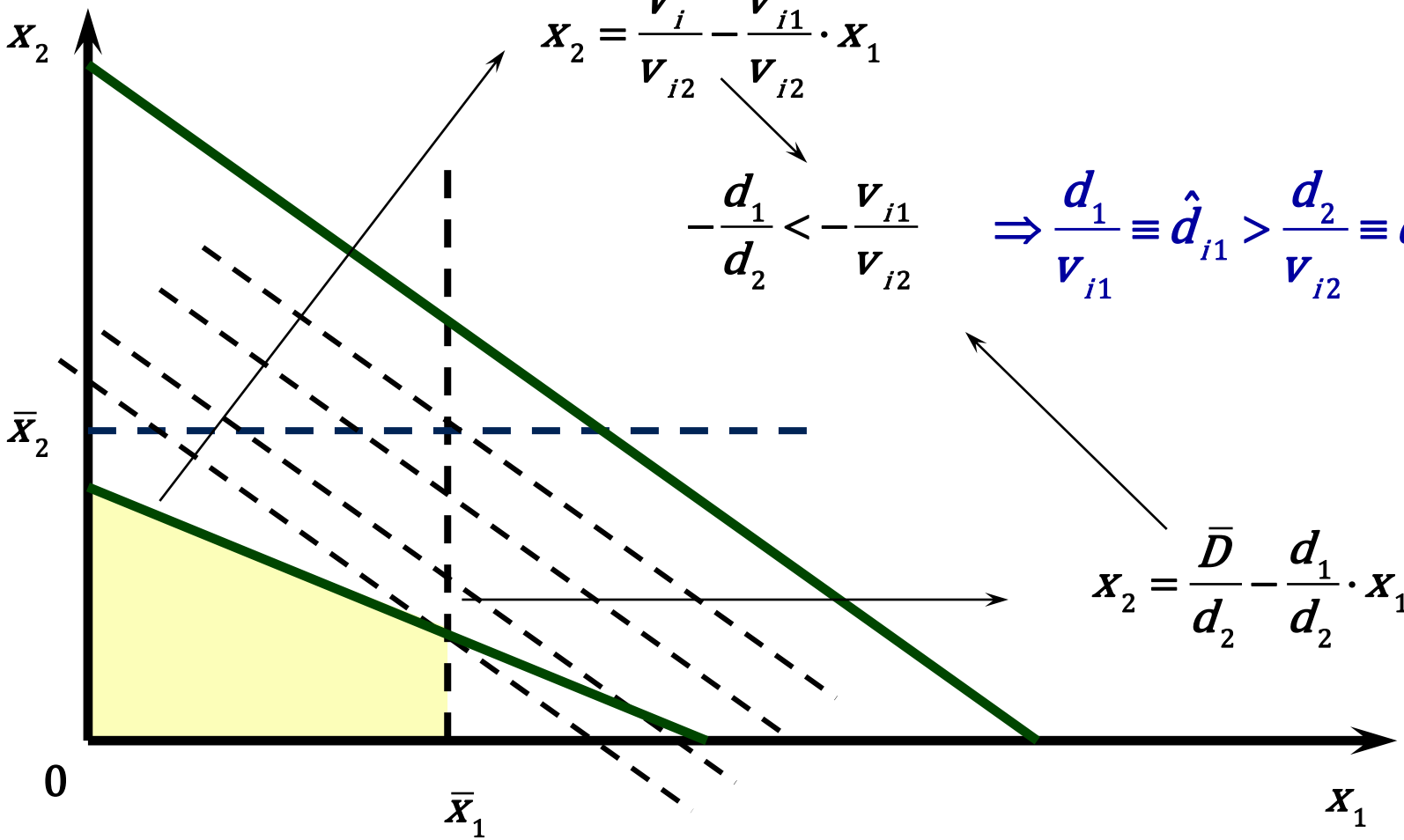


Eine wirksame Mehrproduktrestriktion (Grafik B)

$$x_2 = \frac{\bar{V}_i}{v_{i2}} - \frac{v_{i1}}{v_{i2}} \cdot x_1$$

$$-\frac{d_1}{d_2} < -\frac{v_{i1}}{v_{i2}} \quad \Rightarrow \frac{d_1}{v_{i1}} \equiv \hat{d}_{i1} > \frac{d_2}{v_{i2}} \equiv \hat{d}_{i2}$$

$$x_2 = \frac{\bar{D}}{d_2} - \frac{d_1}{d_2} \cdot x_1$$



Eine wirksame Mehrproduktrestriktion (Grundsätzliches Procedere)

Ausgangspolitik: Bei $d_j > 0$ ist $x_j^* = \bar{x}_j$, andernfalls ist $x_j^* = 0$

- Dabei bindet genau eine Mehrproduktrestriktion i
- Ordnung der Produkte gemäß spezifischer Deckungsbeiträge

$$\hat{d}_{ij} = \frac{d_j}{v_{ij}} \quad \left(j = 1, \ldots, J\right)$$

- Zuordnung gemäß dieser Reihung unter Beachtung der Absatzobergrenzen

Eine wirksame Mehrproduktrestriktion – Beispiel –

Aggregat	$i = 1$	$i = 2$
Kapazität $\overline{V}_i$	**1.000**	3.700

$$d_1 = 40, \quad d_2 = 80$$
$$v_{11} = 2, \quad v_{12} = 8$$

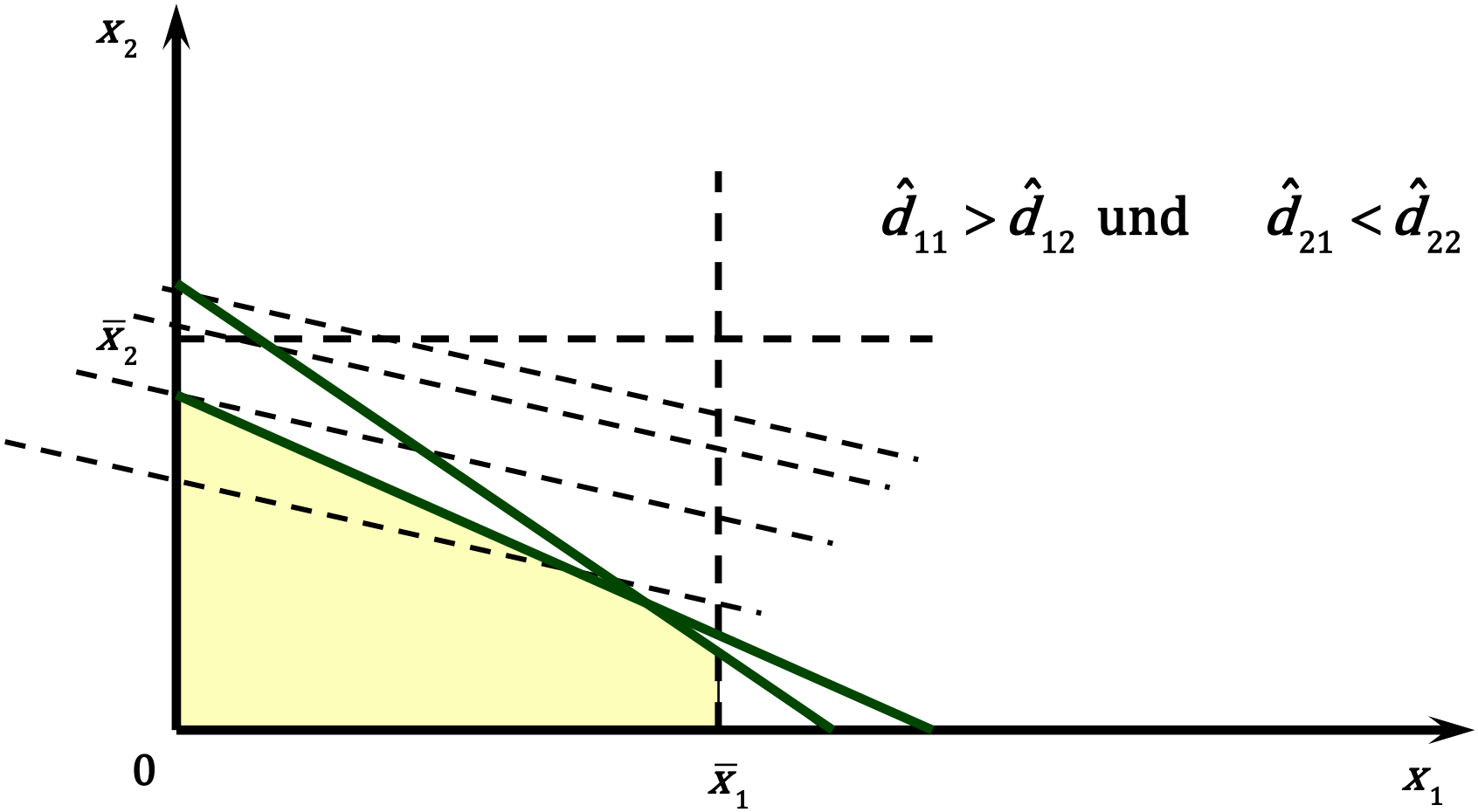
$$\hat{d}_{ij} = \frac{d_j}{v_{ij}} \qquad j = 1, \ldots, J$$

$$\hat{d}_{11} = \frac{d_1}{v_{11}} = \frac{40}{2} = 20 \qquad \hat{d}_{12} = \frac{d_2}{v_{12}} = \frac{80}{8} = 10$$

$$x_1^* = 300; \quad x_2^* = \min\left\{200; \left(1.000 - 300 \cdot 2\right)/8\right\} =$$
$$= \min\left\{200; 50\right\} = 50; \quad x_3^* = 0$$

Deckungsbeitrag $D = 16.000$ und Gewinn $G = 12.000$.

Eine wirksame Mehrproduktrestriktion (Grafik C)



Eine wirksame Mehrproduktrestriktion – Spezialfälle

- Grundsätzliche Regel kann beibehalten werden, wenn
  - wenigstens zwei Mehrproduktrestriktionen bei Ausgangspolitik binden und
  - die Rangfolge der Produkte gemäß spezifischer Deckungsbeiträge für all diese Restriktionen gleich ist
  - es eine für alle Produkte gleichmäßig strengste Mehrproduktrestriktion gibt

Stückweise lineare Deckungsbeiträge - degressiv -

Produkt	$j = 1a$	$j = 1b$	$j = 2$
Preis p_j	200	170	480
variable Kosten k_j	160	160	400
Deckungsbeitrag d_j	40	10	80
Obergrenze $\bar{x}_j$	200	100	200
Verbrauch v_{1j}	2	2	8
Verbrauch v_{2j}	9	9	4

$$\bar{V}_1 = 1.000$$

$$\bar{V}_2 = 3.700$$

$$\hat{d}_{11a} = \frac{40}{2} = 20; \quad \hat{d}_{11b} = \frac{10}{2} = 5; \quad \hat{d}_{12} = \frac{80}{8} = 10$$

$$x^*_{1a} = 200; \quad x^*_{1b} = 0; \quad x^*_2 = 75$$

→ Programm kann aus mehreren Produktarten bestehen, die nicht in ihren Höchstmengen gefertigt werden

Stückweise lineare Deckungsbeiträge - progressiv (1) -

Produkt	$j = 1a$	$j = 1b$	$j = 2$
Preis p_j	200	200	480
variable Kosten k_j	190	160	400
Deckungsbeitrag d_j	10	40	80
Obergrenze $\bar{x}_j$	100	200	200
Verbrauch v_{1j}	2	2	8
Verbrauch v_{2j}	9	9	4

$$\bar{V}_1 = 1.000$$

$$\bar{V}_2 = 3.700$$

$$\hat{d}_{11a} = \frac{10}{2} = 5; \quad \hat{d}_{11b} = \frac{40}{2} = 20; \quad \hat{d}_{12} = \frac{80}{8} = 10$$

$$\hat{d}_{11}^{\phi} = \frac{\bar{x}_{1a} \cdot v_{11} \cdot \hat{d}_{11a} + \left(\bar{V}_1 - \bar{x}_{1a} \cdot v_{11}\right) \cdot \hat{d}_{11b}}{\bar{V}_1} = \hat{d}_{11b} - \left(\hat{d}_{11b} - \hat{d}_{11a}\right) \cdot \frac{\bar{x}_{1a} \cdot v_{11}}{\bar{V}_1} =$$

$$= 20 - 15 \cdot \frac{200}{\bar{V}_1} \qquad \left(\text{für } 200 \le \bar{V}_1 \le 600\right)$$

Stückweise lineare Deckungsbeiträge - progressiv (2) -

- Je mehr Kapazität vorhanden, desto günstiger wird im Durchschnitt Produktart 1

- "Kritischer" Mittelvorrat

$$20 - \frac{3.000}{\bar{V}_1} = \hat{d}_{12} = 10 \quad \Rightarrow \quad \bar{V}_1 = \frac{3.000}{10} = 300$$

$0 < \bar{V}_1 \leq 300$: nur Produktart 2

$300 < \bar{V}_1 \leq 600$: nur Produktart 1

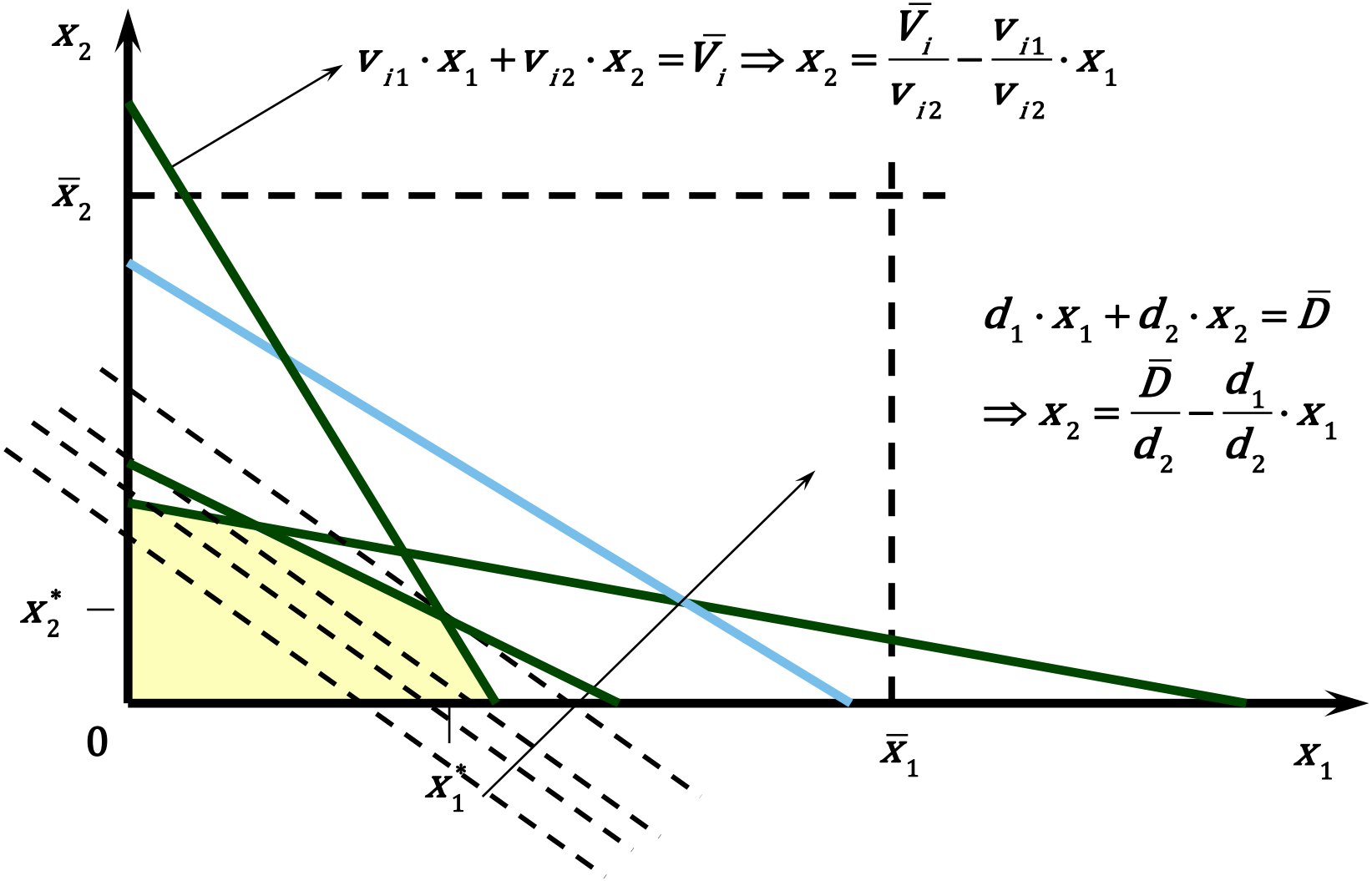
$600 < \bar{V}_1$: Produktart 1 voll,
Produktart 2 je nach Kapazitätshöhe

Mehrere wirksame Mehrproduktrestriktionen

$$v_{i1} \cdot x_1 + v_{i2} \cdot x_2 = \bar{V}_i \Rightarrow x_2 = \frac{\bar{V}_i}{v_{i2}} - \frac{v_{i1}}{v_{i2}} \cdot x_1$$

$$d_1 \cdot x_1 + d_2 \cdot x_2 = \bar{D}$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{\bar{D}}{d_2} - \frac{d_1}{d_2} \cdot x_1$$



Mehrere wirksame Mehrproduktrestr.
- Beispiel -

Produkt	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$
Preis p_j	200	480	1.100
variable Kosten k_j	160	400	1.170
Deckungsbeitrag d_j	40	80	−70
Obergrenze $\overline{x}_j$	300	200	600
Verbrauch v_{1j}	2	8	5
Verbrauch v_{2j}	9	4	1
Aggregat	$i = 1$	$i = 2$	
Kapazität $\overline{V}_i$	1.000	**1.620**	

Gleichungssystem

Einführung nichtnegativer Schlupfvariablen w

$$2 \cdot x_1 + 8 \cdot x_2 + 1 \cdot w_1 + 0 \cdot w_2 + 0 \cdot w_3 + 0 \cdot w_4 = 1.000$$

$$9 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + 0 \cdot w_1 + 1 \cdot w_2 + 0 \cdot w_3 + 0 \cdot w_4 = 1.620$$

$$1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot w_1 + 0 \cdot w_2 + 1 \cdot w_3 + 0 \cdot w_4 = 300$$

$$0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot w_1 + 0 \cdot w_2 + 0 \cdot w_3 + 1 \cdot w_4 = 200$$

$$x_1, x_2 \geq 0; \quad w_1, w_2, w_3, w_4 \geq 0$$

Zielfunktion:

$$D = 40 \cdot x_1 + 80 \cdot x_2 + 0 \cdot w_1 + 0 \cdot w_2 + 0 \cdot w_3 + 0 \cdot w_4$$

Ausgangstableau

BV	x_1	x_2	w_1	w_2	w_3	w_4	D	RS
w_1	2	8	1	0	0	0	0	1.000
w_2	9	4	0	1	0	0	0	1.620
w_3	1	0	0	0	1	0	0	300
w_4	0	1	0	0	0	1	0	200
	-40	-80	0	0	0	0	1	0

$$1 \cdot D - 40 \cdot x_1 - 80 \cdot x_2 = 0$$

Tableau nach 1. Iteration

BV	x_1	x_2	w_1	w_2	w_3	w_4	D	RS
x_2	1/4	1	1/8	0	0	0	0	125
w_2	8	0	-1/2	1	0	0	0	1.120
w_3	1	0	0	0	1	0	0	300
w_4	-1/4	0	-1/8	0	0	1	0	75
	-20	0	10	0	0	0	1	10.000

$$D = 10.000 + 20 \cdot x_1 - 10 \cdot w_1$$

$x_1 + 1 \qquad x_2 = -0{,}25 \qquad w_2 = -9 + 4 \cdot 0{,}25 = -8$

$w_1 + 1 \qquad x_2 = -0{,}125 \qquad w_2 = 0{,}125 \cdot 4 = 0{,}5$

Tableau nach der 2. Iteration (Endtableau)

BV	x_1	x_2	w_1	w_2	w_3	w_4	D	RS
x_2	0	1	9/64	-1/32	0	0	0	90
x_1	1	0	-1/16	1/8	0	0	0	140
w_3	0	0	1/16	-1/8	1	0	0	160
w_4	0	0	-9/64	1/32	0	1	0	110
	0	0	8,75	2,5	0	0	1	12.800

$$D = 12.800 - 8{,}75 \cdot w_1 - 2{,}5 \cdot w_2$$

$$8{,}75 = \frac{9}{64} \cdot 80 - \frac{1}{16} \cdot 40 \qquad 2{,}5 = -\frac{1}{32} \cdot 80 + \frac{1}{8} \cdot 40$$

Sensitivität und Endtableau
- Ceteris Paribus -

$$x_1 = 140 + \frac{1}{16} \cdot w_1 - \frac{1}{8} \cdot w_2 \qquad x_2 = 90 - \frac{9}{64} \cdot w_1 + \frac{1}{32} \cdot w_2$$

$$w_3 = 160 - \frac{1}{16} \cdot w_1 + \frac{1}{8} \cdot w_2 \qquad w_4 = 110 + \frac{9}{64} \cdot w_1 - \frac{1}{32} \cdot w_2$$

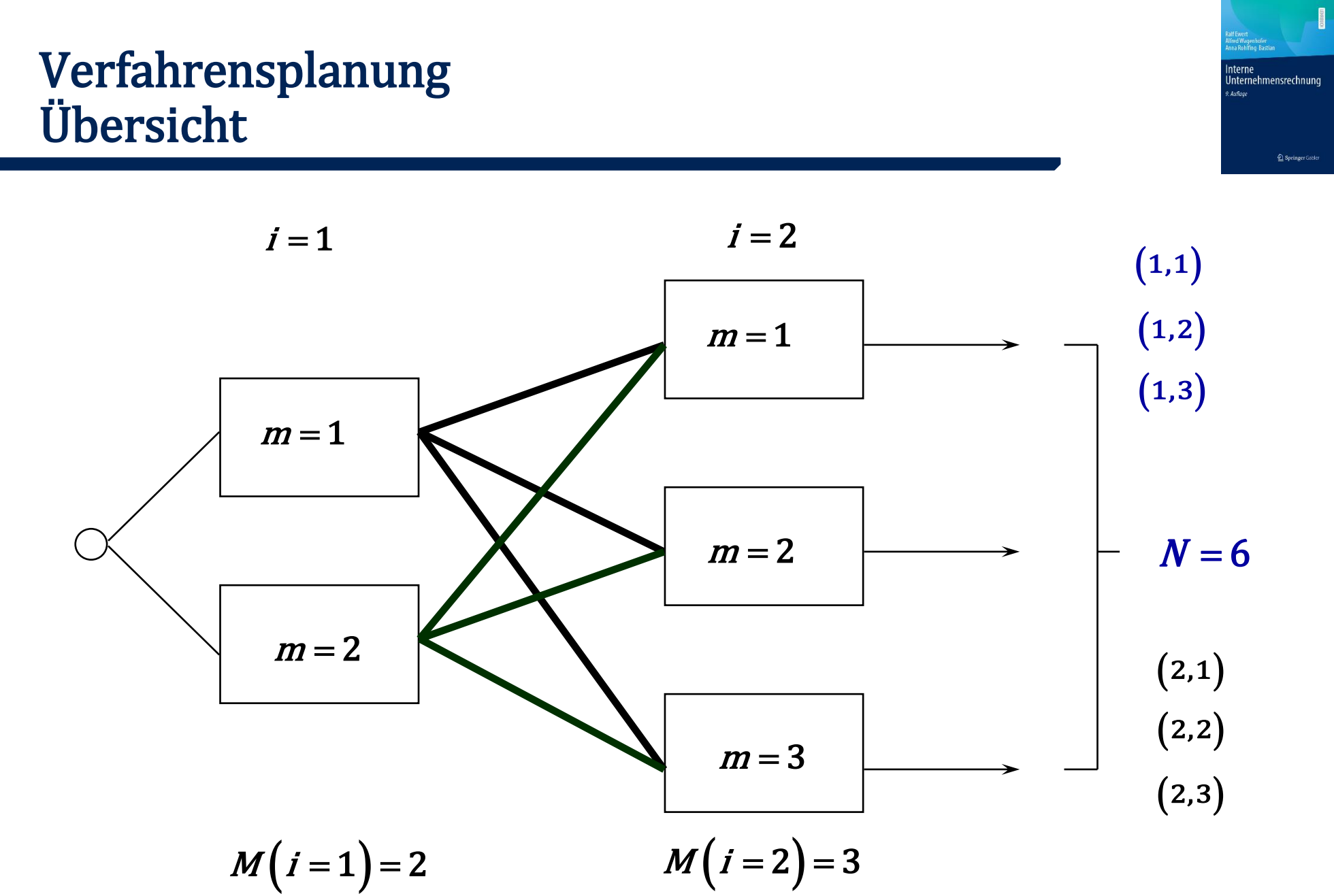
$$w_1 + (w_2 = 0) \qquad w_1 \leq \min\left\{\frac{90 \cdot 64}{9}; \frac{160 \cdot 16}{1}\right\} = 640$$

$$w_2 + (w_1 = 0) \qquad w_2 \leq \min\left\{\frac{8 \cdot 140}{1}; \frac{32 \cdot 110}{1}\right\} = 1.120$$

$$w_1 - (w_2 = 0) \qquad w_1 \geq \max\left\{-\frac{140 \cdot 16}{1}; -\frac{110 \cdot 64}{9}\right\} = -782,\overline{2}$$

$$w_2 - (w_1 = 0) \qquad w_2 \geq \max\left\{-\frac{8 \cdot 160}{1}; -\frac{32 \cdot 90}{1}\right\} = -1.280$$

Verfahrensplanung
Übersicht



Alternativkalkulation

Kombinationsmöglichkeiten: $N = \prod_{i=1}^{I} M(i)$

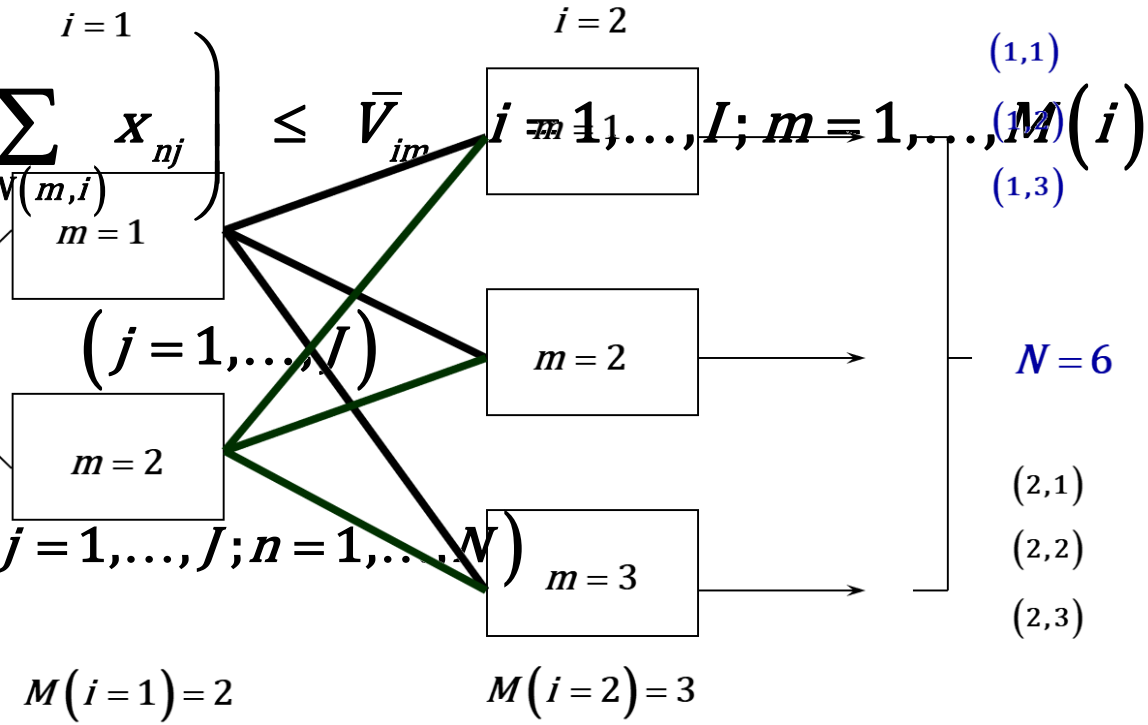
$$\max_{x_{nj}} \sum_{j=1}^{J} \sum_{n=1}^{N} d_{nj} \cdot x_{nj}$$

$u.d.N.:$

$$\sum_{j=1}^{J} v_{imj} \cdot \left(\sum_{n \in N(m,i)} x_{nj} \right) \leq \bar{V}_{im} \qquad i = 1,\ldots,I;\ m = 1,\ldots,M(i)$$

$$\sum_{n=1}^{N} x_{nj} \leq \bar{x}_j \qquad (j = 1,\ldots,J)$$

$$x_{nj} \geq 0 \qquad (j = 1,\ldots,J;\ n = 1,\ldots,N)$$



Alternativkalkulation versus Arbeitsgangverfahren

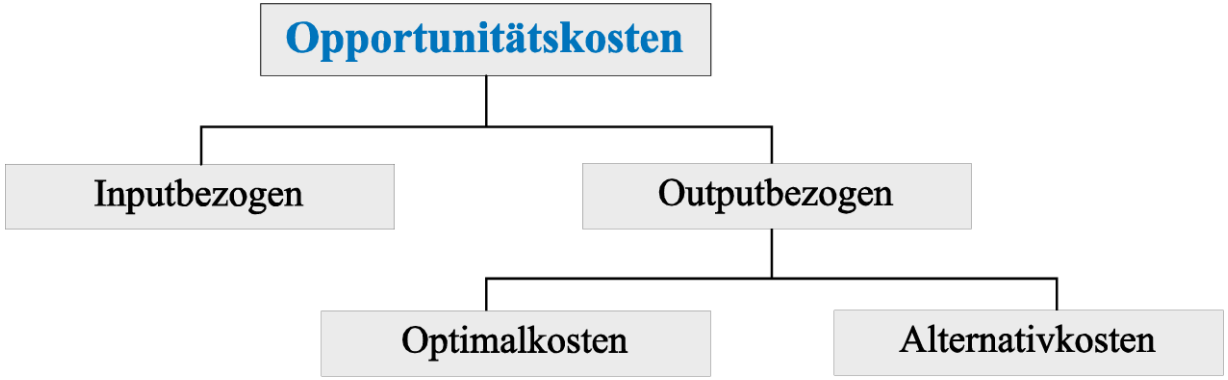
Alternativkalkulation

- **Vorteile**
  - Adaption des Standardverfahrens
  - Daher standardmäßig lösbar
- **Nachteile**
  - Viele Kombinationen (multiplikativ)
  - Viele Kalkulationen
  - Daher relativ teuer

Arbeitsgangverfahren

- **Vorteile**
  - "Direkte" Planung der Verfahren
  - Relativ wenig Variablen (additiv)
  - Daher relativ günstiger
- **Nachteile**
  - Neue Restriktionstypen
  - Daher nicht mehr standardmäßig lösbar

Arten von Opportunitätskosten



- **Inputbezogen**
  - Bei optimalem Einsatz des Faktors erzielbarer Grenzerfolg/Faktoreinheit
- **Outputbezogen/Optimal**
  - Ressourcenbewertung mit inputbezogenem Grenzerfolg
- **Outputbezogen/Alternativ**
  - Ressourcenbewertung mit Erfolg der besten, nicht mehr genutzten Verwendung

Intention der Verwendung von Opportunitätskosten

- Ressourcen können knapp sein
- Einbeziehung der Knappheit in den Wertansatz von Ressourcen
- Neue Kostenbewertung von Ressourcenverwendungen, wie bspw. Produkte, etc.
- Dadurch modifizierte Rangfolge der Vorteilhaftigkeit von Verwendungen
- Optimum könnte sich ggf. alleine daraus schon bestimmen lassen
- Dann benötigte man kein umfassendes Modell unter expliziter Einbeziehung sämtlicher Restriktionen

Inputbezogene Opportunitätkosten
- Formale Zusammenhänge (1) -

$$LG = \sum_{j=1}^{J} x_j \cdot d_j - \sum_{i=1}^{I} \lambda_i \cdot \left(\sum_{j=1}^{J} v_{ij} \cdot x_j - \bar{V}_i \right) - \sum_{j=1}^{J} \mu_j \cdot \left(x_j - \bar{x}_j \right)$$

$$x_j^* > 0 \; und \; \frac{\partial LG^*}{\partial x_j} = 0 : d_j - \sum_{i=1}^{I} v_{ij} \cdot \lambda_i^* - \mu_j^* = 0$$

$$x_j^* = 0 \; und \; \frac{\partial LG^*}{\partial x_j} \leq 0 : d_j - \sum_{i=1}^{I} v_{ij} \cdot \lambda_i^* - \mu_j^* \leq 0$$

$$\lambda_i^* > 0 \; und \; \sum_{j=1}^{J} v_{ij} \cdot x_j^* = \bar{V}_i$$

$$\lambda_i^* = 0 \; und \; \sum_{j=1}^{J} v_{ij} \cdot x_j^* \leq \bar{V}_i$$

$$\mu_j^* > 0 \; und \; x_j^* = \bar{x}_j \qquad \mu_j^* = 0 \; und \; x_j^* \leq \bar{x}_j$$

Inputbezogene Opportunitätskosten
- Formale Zusammenhänge (2) -

$$\frac{\partial LG^*}{\partial \bar{V}_i} = \lambda_i^* \qquad \frac{\partial LG^*}{\partial \bar{x}_j} = \mu_j^*$$

$$d_j \cdot x_j^* = \left(\sum_{i=1}^{I} \lambda_i^* \cdot v_{ij} \right) \cdot x_j^* + \mu_j^* \cdot x_j^*$$

$$\sum_{j=1}^{J} d_j \cdot x_j^* = \sum_{i=1}^{I} \lambda_i^* \cdot \left(\sum_{j=1}^{J} v_{ij} \cdot x_j^* \right) + \sum_{j=1}^{J} \mu_j^* \cdot x_j^*$$

BV	x_1	x_2	w_1	w_2	w_3	w_4	D	RS
x_2	0	1	9/64	-1/32	0	0	0	90
x_1	1	0	-1/16	1/8	0	0	0	140
w_3	0	0	1/16	-1/8	1	0	0	160
w_4	0	0	-9/64	1/32	0	1	0	110
	0	0	8,75	2,5	0	0	1	12.800

$$D^* = \sum_{i=1}^{I} \lambda_i^* \cdot \bar{V}_i + \sum_{j=1}^{J} \mu_j^* \cdot \bar{x}_j$$

Outputbezogene Optimalkosten

Modifizierter Deckungsbeitrag π_j :

$$\pi_j = d_j - \sum_{i=1}^{I} \lambda_i^* \cdot v_{ij} - \mu_j^*$$

$$\forall\ j \text{ mit } x_j^* > 0 \text{ folgt}: \pi_j = 0$$

$$\forall\ j \text{ mit } x_j^* = 0 \text{ folgt}: \pi_j \leq 0$$

Man weiß nur, welche Produktarten das Programm enthalt
Explizites Modell zur Ermittlung der Mengen erforderlich

Outputbezogene Alternativkosten Konzept

Produkt	$j=1$	$j=2$	$j=3$
Deckungsbeitrag d_j	40	80	10
Obergrenze $\bar{x}_j$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
Verbrauch v_j	2	8	5
Spezifischer DB $\hat{d}_j$	20	10	2

$$\bar{V} = 1.000$$

$$d_j^m = d_j - \kappa_j$$

$$x_1^* = 500; \quad x_2^* = x_3^* = 0; \quad D^* = 20.000$$

$$\kappa_1 = v_1 \cdot \hat{d}_2 = 2 \cdot 10 = 20\,;\, d_1^m = 40 - 20 = 20$$

$$\kappa_2 = v_2 \cdot \hat{d}_1 = 8 \cdot 20 = 160\,;\, d_2^m = 80 - 160 = -80$$

$$\kappa_3 = v_3 \cdot \hat{d}_1 = 5 \cdot 20 = 100\,;\, d_3^m = 10 - 100 = -90$$

Outbezogene Alternativkosten
Probleme

Produkt	$j=1$	$j=2$	$j=3$
Deckungsbeitrag d_j	40	80	10
Obergrenze $\bar{x}_j$	100	80	200
Verbrauch v_j	2	8	5
Spezifischer DB $\hat{d}_j$	20	10	2

$\bar{V} = 1.000$

$x_1^* = 100; \quad x_2^* = 80; \quad x_3^* = 32; \quad D^* = 10.720$

$\kappa_1 = v_1 \cdot \hat{d}_2 = 2 \cdot 10 = 20\,;\, d_1^m = 40 - 20 = 20$ Nein!

$\kappa_1 = v_1 \cdot \hat{d}_3 = 2 \cdot 2 = 4\,;\, d_1^m = 40 - 4 = 36$ ←

$\kappa_2 = v_2 \cdot \hat{d}_1 = 8 \cdot 20 = 160\,;\, d_2^m = 80 - 160 = -80$ Nein!

$\kappa_2 = v_2 \cdot \hat{d}_3 = 8 \cdot 2 = 16\,;\, d_2^m = 80 - 16 = 64$ ←

$\kappa_3 = v_3 \cdot \hat{d}_2 = 5 \cdot 10 = 50\,;\, d_3^m = 10 - 50 = -40$ Nein!

$\kappa_3 = 0$ ←

Opportunitätskosten
Beurteilung

- Es gibt Größen mit der Eigenschaft, dass Knappheit in den Wertansatz integriert ist
- Eine richtige Ermittlung setzt aber die Kenntnis der Lösung voraus (auch bei Alternativkosten)
- Im linearen Fall könnte auch dann nicht auf ein explizites und umfassendes Modell verzichtet werden
- Angedachte Vorteile so nicht existent
- Verwendungsmöglichkeiten
  im Rahmen von postoptimalen Analysen
- Beispiel: Preisuntergrenzen von Zusatzaufträgen, etc.

Nichtlineare Ansätze
Besonderheiten

- **Optimum muss keine Randlösung sein**

- **Eine wirksame Mehrproduktrestriktion**
  - Rangfolge gemäß spezifischer Grenzdeckungsbeiträge
  - Diese SGD sind aber variabel
  - Zuordnung daher unter Berücksichtigung sowohl der
    - Absatzobergrenzen, als auch der
    - SGD nachfolgender Produkte
  - Ggf. werden mehrere Produkte parallel zugerodnet

- **Undifferenzierte Anwendung der Lagrange-Methode führt nicht immer zur korrekten Lösung**