Für eine Kostenfunktion gilt allgemein:

$$K\left(x\right) = K_{var}\left(x\right) + K_{Fix}$$

im Speziellen für für eine lineare Kostenfunktion:

$$K\left(x\right) = a \cdot x + b$$

wobei a die variablen Kosten pro Einheit und b die Fixkosten darstellen.
Somit gilt in unserem Fall:

$$K\left(x\right) = 0,5x + 400$$

Nun bestimmen wir die Gleichung der Preis-Absatz-Funktion, die den erzielbaren Preis p in Abhängigkeit von der Absatzmenge x angibt. Laut Angabe wird eine lineare Preis-Absatz-Funktion unterstellt:

$$p\left(x\right) = k \cdot x + d$$

Bei einem Preis von $p = 2,00$ € pro Dose, lassen sich $x = 500$ Dosen absetzen:

$$2 = 500k + d$$

Bei einem Preis von $p = 1,80$ € pro Dose, lassen sich $x = 600$ Dosen absetzen:

$$1,80 = 600k + d$$

Das entstehende Gleichungssystem

$$\begin{array}{lrcrcl} \text{I:} & 2 & = & 500k & + & d \\ \text{II:} & 1,80 & = & 600k & + & d \end{array}$$

kann z.B. mit Hilfe des Eliminationsverfahrens gelöst werden.

$$\left.\begin{array}{lrcrclc} \text{I:} & 2 & = & 500k & + & d & \mid \cdot(-1) \\ \text{II:} & 1,80 & = & 600k & + & d & \end{array}\right) +$$

Multipliziert man die erste Gleichung mit (-1) und addiert das Ergebnis zur zweiten Gleichung erhält man:

$$-0,2 = 100k$$

Und daraus

$$k = -0,002$$

Eingesetzt in z. B. Gleichung I ergibt sich

$$2 = 500 \cdot (-0,002) + d$$

und damit:

$$d = 3$$

Die Gleichung der Preis-Absatz-Funktion lautet somit

$$p(x) = -0,002x + 3$$

Mit Hilfe der Preis-Absatz-Funktion lässt sich nun die Erlösfunktion (oder Umsatzfunktion) bestimmen. Es gilt:

$$E(x) = p(x) \cdot x$$

In unserem Fall:

$$E(x) = (-0,002x + 3) \cdot x$$

Ausmultipliziert daher

$$E(x) = -0,002x^2 + 3x$$

Für eine Gewinnfunktion gilt:

$$G(x) = E(x) - K(x)$$

Wir erhalten daher

$$G(x) = -0,002x^2 + 3x - (0,5x + 400)$$

Zusammengefasst:

$$G(x) = -0,002x^2 + 2,5x - 400$$

Nun müssen wir noch das Maximum dieser Funktion bestimmen. Wir bilden dazu zunächst die erste und die zweite Ableitung.

$$G'(x) = -0,004x + 2,5$$

$$G''(x) = -0,004$$

Um das Maximum der Funktion zu bestimmen, muss $G'(x) = 0$ und $G''(x) < 0$ gelten.

$$G'(x) = 0 \Leftrightarrow -0,004x + 2,5 = 0$$

liefert

$$x = 625$$

Um zu überprüfen, ob tatsächlich ein Maximum vorliegt, wird dieser Wert noch in die zweite Ableitung eingesetzt. Wir erhalten

$$G''(625) = -0,004 < 0$$

Die gewinnmaximale Produktionsmenge lautet somit

$$x_{max} = 625$$

Es ist also Antwort 3 richtig.