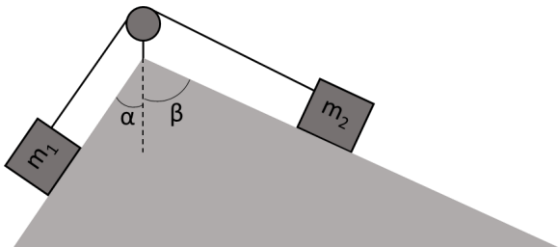
1. Schiefe Ebenen



Zwei Massen m_1 = 2.6 kg und m_2 = 7.31 kg sind über ein Seil und eine Rolle verbunden (wie dargestellt), wobei Reibung zu vernachlässigen ist. Der Winkel β ist fest (70°) und die beiden Massen sind anfangs in Ruhe.

(a) Bestimmen Sie für den Fall α = 0° (Masse m_1 hängt frei nach unten) die Beschleunigung der beiden Massen (30 Punkte).

$$F = ma$$

$$F_1 + F_2 = (m_1 + m_2)a$$

Die Richtung der Bewegung von m_1 nach oben wird als positive Richtung definiert. Die Kräfte, die (in verschiedene Richtungen) auf die Massen wirken, sind gegeben durch:

$$F_1 = -m_1 * g * cos(\alpha)$$

$$F_2 = m_2 * g * cos(\beta)$$

Einsetzen in die Gleichung liefert:

$$m_2 * g * cos(\beta) - m_1 * g * cos(\alpha) = (m_1 + m_2) * a$$

$$\Longrightarrow a = \frac{m_2 * g * cos(\beta) - m_1 * g * cos(\alpha)}{m_1 + m_2}$$

In diesem Fall sind folgende Werte gegeben:

$$\alpha = 0°, \qquad \beta = 70°, \qquad m_1 = 2.6\,kg, \qquad m_2 = 7.31\,kg$$

$$a = \frac{7.31\,kg * 9.81\,m\,s^{-2} * cos(70°) - 2.6\,kg * 9.81\,m\,s^{-2} * cos(0°)}{2.6\,kg + 7.31\,kg}$$

$$a = -0.09882535821\,m\,s^{-2}$$

$$\boldsymbol{a = -9.9 \times 10^{-2}\,m\,s^{-2}}$$

(b) In welche Richtung bewegt sich Masse m_1 dabei? (10 Punkte)

Die positive Richtung wurde als die Bewegung von m_1 nach oben definiert. Das Vorzeichen der Beschleunigung $\boldsymbol{a}$ *in Aufgabe (a) ist negativ. Daraus folgt, dass sich* ***m_1 nach unten bewegt****.*

(c) Nun wird der Winkel α auf 20° erhöht (und m_1 liegt wie dargestellt auf der schiefen Ebene). Bestimmen Sie für diesen Fall die Beschleunigung der beiden Massen und geben Sie an in welche Richtung sich m_1 dabei bewegt. (40 Punkte)

In diesem Fall sind folgende Werte gegeben:

$$\alpha = 20°, \qquad \beta = 70°, \qquad m_1 = 2.6\,kg, \qquad m_2 = 7.31\,kg$$

$$a = \frac{7.31\ kg * 9.81\ m\ s^{-2} * cos(70°) - 2.6\ kg * 9.81\ m\ s^{-2} * cos(20°)}{2.6\ kg + 7.31\ kg}$$

$$a = 0.056391595789\ m\ s^{-2}$$

$$\boldsymbol{a = 5.6 \times 10^{-2}\ m\ s^{-2}}$$

Da das Vorzeichen der Beschleunigung in diesem Fall positive ist, ***bewegt sich m_1 nach oben****.*

(d) Welchen Wert muss α haben damit die Massen m_1 und m_2 in Ruhe bleiben? (30 Punkte)

Damit sich die beiden Massen nicht bewegen, muss die Beschleunigung verschwinden (null sein).

$$a = \frac{m_2 * g * cos(\beta) - m_1 * g * cos(\alpha)}{m_1 + m_2} = 0$$

$$m_2 * g * cos(\beta) - m_1 * g * cos(\alpha) = 0$$

$$m_1 * g * cos(\alpha) = m_2 * g * cos(\beta)$$

$$cos(\alpha) = \frac{m_2 * g * cos(\beta)}{m_1 * g}$$

$$\alpha = acos\left(\frac{m_2 * cos(\beta)}{m_1}\right)$$

$$\alpha = acos\left(\frac{7.31\ kg * cos(70°)}{2.6\ kg}\right)$$

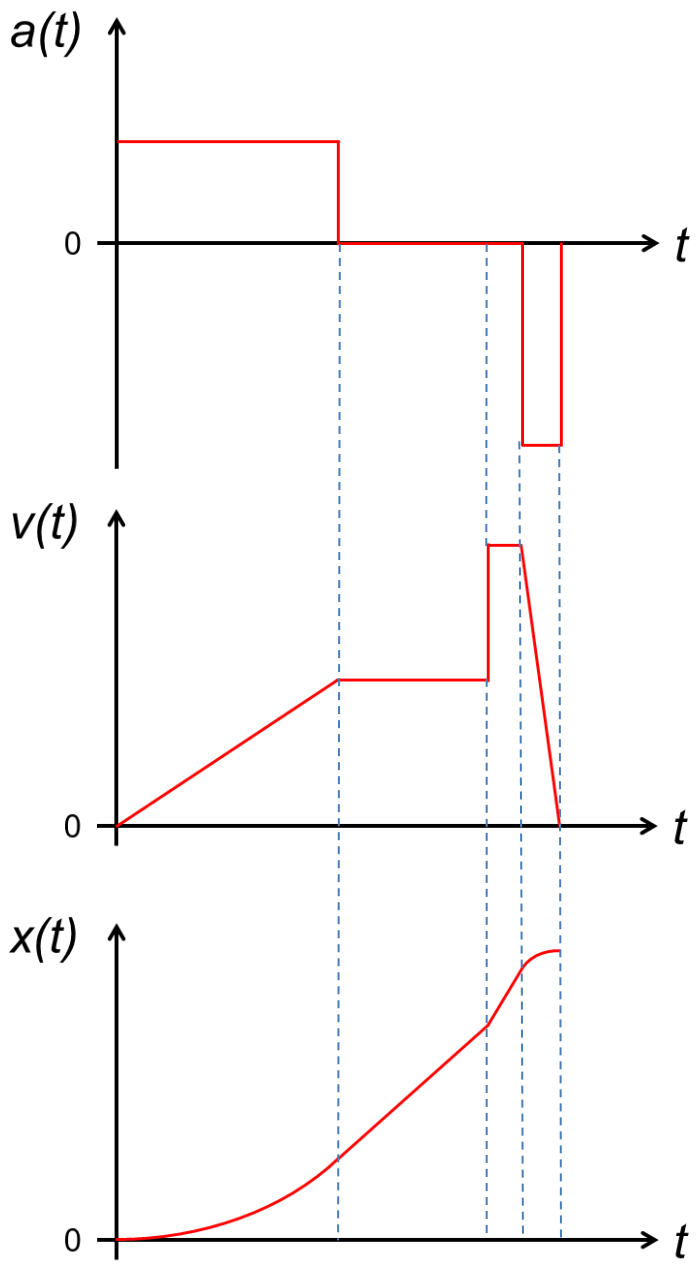
$$\alpha = 15.92894479348°$$

$$\boldsymbol{\alpha = 16°}$$

2. Kurier

Ein Reiterkurier bringt eine Nachricht in die Nachbarstadt. Er startet aus dem Stand, erreicht nach 1.42×10^3 s konstanter Beschleunigung eine Geschwindigkeit von 43 km h^{-1} und behält diese Geschwindigkeit für 10.2 Minuten. Zu diesem Zeitpunkt trifft er auf einen Räuber, erhöht seine Geschwindigkeit augenblicklich auf 80 km h^{-1} und bewegt sich für 112 s mit dieser Geschwindigkeit (wodurch er den Räuber abhängt). Anschließend reduziert er seine Geschwindigkeit mit -3.15 m s^{-2} bis er zum Stillstand kommt.

(a) Zeichnen Sie *a(t)*, *v(t)*, und *x(t)* für den gesamten Ritt. (40 Punkte)



(b) Wie lautet die Beschleunigung des Reiters zu Beginn (in m s^{-2})? (20 Punkte)

$$\mathrm{v} = \mathrm{v}_0 + \mathrm{at}$$
$$\Rightarrow \mathrm{a} = \frac{\mathrm{v} - \mathrm{v}_0}{\mathrm{t}}$$

$$\mathrm{v} = 43\ \mathrm{km\ h^{-1}} = 43\ \mathrm{km\ h^{-1}} * \frac{1000\ \mathrm{m\ km^{-1}}}{3600\ \mathrm{s\ h^{-1}}} = 11.9444444444\ \mathrm{m\ s^{-1}}$$
$$\mathrm{v_0} = 0\ \mathrm{m\ s^{-1}}$$
$$\mathrm{t} = 1.42\ \times 10^3\ \mathrm{s}$$

$$\mathrm{a} = \frac{11.9444444444\ \mathrm{m\ s^{-1}}}{1420\ \mathrm{s}} = 8.411580594 \times 10^{-3}\ \mathrm{m\ s^{-2}}$$
$$\mathbf{a = 8.4 \times 10^{-3}\ m\ s^{-2}}$$

(c) Welche Gesamtdistanz legt er zurück? (40 Punkte)

Vier Distanzen sind separat zu berechnen:

x_1, Beschleunigung zu Beginn

x_2, konstante Geschwindigkeit

x_3, vom Räuber verfolgt (konstante Geschwindigkeit)

x_4, Reduzierung der Geschwindigkeit (negative Beschleunigung)

$$x_1 = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$
$$x_1 = 0 + \frac{1}{2} * 8.411580594 \times 10^{-3}\ m\ s^{-2} * 1420^2\ s^2$$
$$x_1 = 8480.55555\ m$$

$$x_2 = v * t$$
$$x_2 = 10.2 * 60\ s * 11.9444444444\ m\ s^{-1}$$
$$x_2 = 7310\ m$$

$$x_3 = v * t$$
$$x_3 = 80 * \frac{1000\ m}{3600\ s} * 112\ s$$
$$x_3 = 2488.888888\ m$$

$$x_4 = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

Da die Zeit t nicht explizit gegeben ist, setzt man $t = \frac{v - v_0}{a}$ *ein:*

$$x_4 = \frac{v_0(v - v_0)}{a} + \frac{a(v - v_0)^2}{2a^2}$$

$$x_4 = \frac{1}{2a} * (2v_0(v - v_0) + (v - v_0)^2)$$

$$x_4 = \frac{1}{2a} * (2v_0 v - 2v_0^2 + v^2 + v_0^2 - 2vv_0)$$

$$x_4 = \frac{1}{2a} * (v^2 - v_0^2)$$

$$x_4 = \frac{1}{2 * (-3.15) m\, s^{-2}} * \left(0^2\, m^2\, s^{-2} - \left(80 * \frac{1000}{3600}\right)^2 m^2\, s^{-2}\right)$$

$$x_4 = 78.38526357044\, m$$

Gesamte Distanz: $x = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$

$$x = 18357.82970157\, m$$

$$\boldsymbol{x = 1.84 \times 10^4\, m}$$

3. Wurfparabel

Ein Junge steht auf einem Felsen und wirft einen Stein auf die darunter liegende ebene Fläche. Der Stein wird mit einer absoluten Geschwindigkeit von 78 km/h und unter einem Winkel von exakt 41° (zur Horizontalen) nach schräg oben geworfen. Der Junge befindet sich in einer Höhe von 55.0 m über der Ebene.

(a) Wie lauten die horizontale und vertikale Komponente von v_0? (10 Punkte)

$$v_h = v_0 * cos(\theta) = \frac{78\ km\ h^{-1}}{3.6\ km\ h^{-1}\ m^{-1}s} * cos(41°) = 16.3520409\ m\ s^{-1}$$

$$\boldsymbol{v_h = 16\ m\ s^{-1}}$$

$$v_v = v_0 * sin(\theta) = \frac{78\ km\ h^{-1}}{3.6\ km\ h^{-1}\ m^{-1}s} * sin(41°) = 14.21461229\ m\ s^{-1}$$

$$\boldsymbol{v_h = 14\ m\ s^{-1}}$$

(b) Nach welcher Zeit erreicht der Stein die maximale Höhe? (20 Punkte)

Wenn der Stein die maximale Höhe erreicht, beträgt seine vertikale Geschwindigkeit $0\ m\ s^{-1}$. *Darum:*

$$v_y(t_{max}) = -g * t_{max} + v_v = 0\ m\ s^{-1}$$

$$v_v = g * t_{max}$$

$$t_{max} = \frac{v_v}{g} = \frac{v_0 * sin(\theta)}{g} = \frac{78\ km\ h^{-1} sin(41°)}{3.6\ km\ h^{-1}\ m^{-1}s * 9.81\ m\ s^{-2}}$$

$$= 1.448992079\ s$$

$$\boldsymbol{t_{max} = 1.4\ s}$$

(c) Welche maximale Höhe (über der Ebene) erreicht der Stein? (30 Punkte)

$$y_{max}(t_{max}) = -\frac{1}{2} g * t_{max}^2 + v_v * t_{max} + h_0 = -\frac{1}{2} g * t_{max}^2 + v_0 * \sin(\theta) * t_{max} + h_0$$

$$y_{max} = -\frac{1}{2}\frac{v_0^2 * \sin^2(\theta)}{g} + \frac{v_0^2 * \sin^2(\theta)}{g} + h_0 = \frac{1}{2}\frac{v_0^2 * \sin^2(\theta)}{g} + h_0$$

$$y_{max} = \frac{78^2\ \mathrm{km^2h^{-2}} * \sin^2(41°)}{2 * 3.6^2\ \mathrm{km^2h^{-2}m^{-2}s^2} * 9.81\ \mathrm{m\ s^{-2}}} + 55.0\ \mathrm{m} = 65.29843031\ \mathrm{m}$$

$$\boldsymbol{y_{max} = 65\ \mathrm{m}}$$

(d) In welcher horizontalen Entfernung von der Abwurfstelle landet der Stein? (40 Punkte)

Man muss erst berechnen, nach welcher Zeit der Stein landet, also auf Höhe y = 0 m ankommt:

$$y_0(t_0) = 0\ m = -\frac{1}{2} g * t_0^2 + v_v * t_0 + h_0$$

$$= -\frac{1}{2} g * t_0^2 + v_0 * sin(\theta) * t_0 + h_0$$

$$t_0^2 - \frac{2 * v_0 * sin(\theta)}{g} * t_0 - \frac{2 * h_0}{g} = 0\ m$$

Lösen mit Hilfe der pq-Formel:

$$t_0^{(1,2)} = \frac{v_0 * sin(\theta)}{g} \pm \sqrt{\left(-\frac{v_0 sin(\theta)}{g}\right)^2 + \frac{2h_0}{g}}$$

Nur eine Lösung für t_0 ist physikalisch sinnvoll:

$$t_0 = \frac{78\ km\ h^{-1} sin(41°)}{3.6\ km\ h^{-1}\ m^{-1} s * 9.81\ m\ s^{-2}} + \sqrt{\left(-\frac{78\ km\ h^{-1} sin(41°)}{3.6\ km\ h^{-1}\ m^{-1} s * 9.81\ m\ s^{-2}}\right)^2 + \frac{2 * 55.0\ m}{9.81\ m\ s^{-2}}}$$

$$t_0 = 5.097639219\ s \qquad \textit{(2 signifikante Stellen)}$$

Die Flugzeit wird nun in die Gleichung für x(t) eingesetzt:

$$x_0(t_0) = v_h * t_0 = v_0 * cos(\theta) * t_0$$

$$= \frac{78\ km\ h^{-1}}{3.6\ km\ h^{-1}\ m^{-1} s} * cos(41°) * 5.097639219\ s$$

$$x_0 = 83.35680503\ m$$

$$\boldsymbol{x_0 = 83\ m}$$